Formalisme Hamiltonien et Matrices symplectiques

Patrick BERTRAND

CERN LIBRARIES, GENEVA
SCAN-9712017

GANIL R 97 06

sw9749

GANIL
Projet SPIRAL
Bd. H. Becquerel
BP 5027
14076 CAEN cedex 5
Tél : 02.31.45.45.20
email : bertrand@ganil.fr

SOMMAIRE

0.	Introduction		1
1.	Formalisme Lagrangien		3
	1.1	Equations de Lagrange	3
	1.2	Interprétation du Lagrangien	7
	1.3	Principe de moindre action	8
	1.4	Invariance des équations de Lagrange	9
	1.5	Expression du Lagrangien en coordonnées (x,y,z)	10
	1.6	Expression du Lagrangien en coordonnées (r,θ,z)	10
2.	Formalisme Hamiltonien		11
	2.1	Variables conjuguées	11
	2.2	Hamiltonien et équations de Hamilton	11
	2.3	Expression de l'Hamiltonien en coordonnées (x,y,z)	13
	2.4	Expression de l'Hamiltonien en coordonnées (r,θ,z)	14
	2.5	Changement de variable d'évolution	14
	2.6	Exemple de changement de variable d'évolution	16
	2.7	Introduction de la matrice J	19
	2.8	Changement d'ordre des variables conjuguées	19
	2.9	Solution des équations de Hamilton dans le cas linéaire	20
3.	Matrices symplectiques		22
	3.1	Définition	22
	3.2	Propriétés	22
	3.3	Exemples	23
	3.4	Représentation exponentielle	25
	3.5	Paramétrisation	28
4.	Matrices de transfert et symplecticité		30
	4.1	Notion de transformation symplectique	30
	4.2	Caractère symplectique des systèmes Hamiltoniens	31
	4.3	Matrices de transfert	32
	4.4	Changement d'ordre des variables	33
	4.5	Calcul approché dans le cas général	33
	4.6	Symplectisation d'une matrice de transfert approchée	36
	4.7	Calcul exact quand le Hessien de l'Hamiltonien est constant	36
	4.8	Interfaces « hard-edge »	37
	4.9	Notion de matrice faisceau	38
5.	Exemples		40
	5.1	« drift » pour des particules non relativistes	40

5.2 « drift » pour des particules relativistes 41
5.3 Dipôle 42
5.4 Inflecteur de Muller 51

6. Remerciements 59

7. Commentaires bibliographiques et conculsion 59

8. Bibliographie 60

0. Introduction

Ce document est consacré aux propriétés des matrices de transfert décrivant les différents objets électromagnétiques que nous utilisons abondamment : dipôles, quadrupôles, cyclotrons, déflecteurs électrostatiques, inflecteurs spiral etc...

Bon nombre de ces objets physiques son suffisamment éloignés les uns des autres (« drifts ») pour que chacun d'eux soit considéré comme plongé dans un champ électromagnétique extérieur nul, et que sa matrice de transfert en décrive correctement le comportement au premier ordre. Toutefois, certains objets sont « plongés » dans un champ électromagnétique non nul : par exemple, l'inflecteur Muller du cyclotron CIME baigne dans un champ magnétique constant, pour un réglage donné.

En pratique, les matrices de transfert proviennent d'un calcul analytique, ou bien résultent d'un calcul de dynamique de faisceau utilisant des champs électromagnétiques analytiques, calculés ou mesurés.

Une propriété remarquable des matrices de transfert au premier ordre, quand elles sont exactes, est la *symplecticité* : dans le cas d'un objet tridimensionnel traité dans l'espace des phases de dimension 6, elle se traduit par 15 relations non linéaires reliant les coefficients de la matrice. Nous verrons dans la suite que l'ensemble des matrices symplectiques (en dimension (6,6) par exemple), constitue *un groupe non commutatif* pour la multiplication : cela signifie que le produit de n matrices symplectiques est encore une matrice symplectique, qui décrit ainsi d'un façon globale le comportement des n objets. (la non commutativité indiquant que l'ordre des objets n'est évidemment pas indifférent...).

La notion de symplecticité est fondamentale pour le choix d'un objet électromagnétique donné, pour son optimisation et son insertion dans une ligne de transfert de faisceau : les relations symplectiques indiquent en effet que telle caractéristique du faisceau, si elle est modifiée, s'accompagnera nécessairement d'un effet sur telle autre caractéristique, et c'est, en définitive, en jouant sur les effets successifs voulus que l'on peut construire un ligne en limitant les effets indésirables.

Un certain nombre de questions fondamentales surviennent cependant dans la pratique ; en voici quelques unes :

. Quelles sont les coordonnées d'espace que l'on désire prendre pour analyser le comportement des particules dans un objet donné, et quelle est la variable d'évolution ? Ce choix étant fait, quelles sont les « moments conjugués » correspondants ? Nous verrons en effet que *si nous ne prenons pas* des variables conjuguées dans l'espace des phases au sens du formalisme Hamiltonien, la symplecticité de la matrice de transfert n'est pas assurée...

. A-t-on le droit de considérer une portion d'objet, par exemple un demi dipôle ou une portion de cyclotron ? Que devient la symplecticité si le champ magnétique n'est pas nul ou est différent aux 2 extrémités de l'objet ? Comment traiter les interfaces « Hard edge » ?

. Si l'on choisit z ou θ au lieu de t comme variable d'évolution , quelle est alors la variable conjuguée associée au temps t ? Plus généralement, comment procéder si l'on veut mettre bout à bout des matrices

de transfert symplectiques n'utilisant pas le même système de coordonnées et les mêmes variables d'évolution ? Cette question intervient par exemple, quand il s'agit d'interfacer des logiciels différents...

. Enfin, si une matrice provient d'un calcul numérique, qui est nécessairement approché, comment « symplectiser » cette matrice ?

Il nous a semblé utile d'éclaircir ces différents points en analysant de façon précise l'origine même de la symplecticité : nous le ferons en développant successivement les points suivants :

Nous nous placerons d'emblée dans le cas **d'une particule relativiste chargée plongée dans un champ électromagnétique quelconque**, c'est à dire dépendant éventuellement explicitement du temps.

Afin d'éviter un démarrage par trop abstrait, nous partirons de la relation fondamentale de la dynamique, présentant une signification physique forte, et « remonterons » progressivement au Lagrangien de la particule relativiste, et aux équations de Lagrange associées.

Nous montrerons ensuite que ces équations ont une forme intrinsèque, c'est à dire indépendante du système de coordonnées. Cette propriété est essentielle car elle permet de déduire automatiquement les moments conjugués sans risque de se tromper.

Puis nous « redescendrons » vers l'Hamiltonien et les équations de Hamilton qui lui sont associées.

Pour un système de variables conjuguées donné, nous montrerons alors comment l'on peut intervertir le variable d'évolution t avec la variable d'espace correspondant à la direction privilégiée du faisceau.

Nous serons alors en mesure d'aborder la notion de matrice de transfert et la symplecticité, qui découlent directement des propriétes des équations de Hamilton.

Enfin nous traiterons un certain nombre de cas pratiques.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, une remarque importante concernant les **notations** doit être faite dès le départ :

. La charge d'une particule sera notée q en italique.

. Sa quantité de mouvement, ou impulsion mécanique, sera notée $\vec{p}$ en italique.

. Son impulsion généralisée sera notée $\vec{\mathbf{P}}$ en majuscule.

. Ceci nous permettra de réserver la notation **(q,p)** au système de variables conjuguées utilisé traditionnellement dans les formalismes Lagrangien et Hamiltonien.

1. Formalisme Lagrangien

1.1 Equations de Lagrange

Considérons une particule relativiste chargée, de masse au repos m_0 et de charge q subissant des forces électromagnétiques quelconques. Son mouvement est décrit par la relation fondamentale de la dynamique :

(1) $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

où :

(2) $\vec{p} = m\vec{v}$ quantité de mouvement

(3) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ vitesse de la particule

(4) $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ masse relativiste

(5) $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \Lambda \vec{B}\right)$ force de Lorentz

(6) $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ champ électrique

(7) $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$ induction magnétique

V et $\vec{A}$ désignent respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur. Ils dépendent de l'espace et éventuellement explicitement du temps. Il en est de même pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$\vec{r}$ désigne la position de la particule à l'instant t. Si l'on se donne la position et la vitesse de la particule à l'instant initial, sa position et sa vitesse à un instant ultérieur sont parfaitement déterminées par les équations ci-dessus.

Soit $q = (q_1, q_2, q_3)$ un **système de coordonnées généralisées** quelconque dépendant éventuellement du temps. La position $\vec{r}$ est alors un fonction de q(t) et éventuellement explicitement de t, ce qui s'écrit :

(8) $$\vec{r} = \vec{r}(q,t) = \vec{r}(q_1, q_2, q_3, t)$$

de sorte que le déplacement infinitésimal **réel** de la particule à l'instant t s'écrit, en utilisant la convention des indices répétés (que nous adoptons pour toute la suite) :

$$(9) \qquad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

et que la vitesse réelle $\vec{v}$ devient :

$$(10) \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Les formules (9) et (10) sont volontairement laissées sous forme vectorielles : en effet, il ne faut pas confondre le choix du système de coordonnées généralisées q et un éventuelle projection des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ selon les 3 axes d'un repère... Pour s'en convaincre, on pourra regarder ce qui se passe en choisissant successivement q = (x,y,z) et q = (r,θ,z), et en projetant dans les 2 cas les formules obtenues *dans le même repère* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En fait, nous n'aurons pas besoin dans la suite de choisir un repère de projection des composantes d'un vecteur physique, et c'est sans doute là un des points les plus délicats à appréhender...

L'élément $d\vec{r}$ de la formule (9) désigne le déplacement réel de la particule subissant à l'instant t les forces extérieures, exprimé selon le système de coordonnées choisi.

Soit maintenant un variation infinitésimale *quelconque* δq à un instant t donné. Nous entendons par « quelconque » le fait que les δq_i sont indépendants les uns des autres et ne sont pas influencés par les forces physiques. A une telle variation correspond un déplacement *virtuel* $\delta\vec{r}$ donné par :

$$(11) \qquad \delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Nous constatons alors l'équivalence suivante :

$$(12) \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \delta\vec{r}, \ \frac{d\vec{p}}{dt}.\delta\vec{r} = \vec{F}.\delta\vec{r}$$

L'équivalence gauche droite est évidente : si 2 vecteurs sont égaux, on a le droit de les multiplier scalairement par un vecteur quelconque. Inversement, étant donné un repère de projection, il suffit de prendre successivement $\delta\vec{r}$ =(1,0,0), $\delta\vec{r}$ =(0,1,0) et $\delta\vec{r}$ =(0,0,1) pour démontrer l'égalité de gauche.

Cette constatation nous permet de « remonter » au Lagrangien, en effet :

$$(13) \qquad \left(\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{F}\right).\delta\vec{r} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{F}\right).\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Il est équivalent de dire que $\delta\vec{r}$ est quelconque ou que les δq_i sont quelconques et indépendants dès l'instant où la particule ne subit pas de « liaison » physique de sorte que (13) se traduit par les 3 équations :

$$(14) \qquad \frac{d\vec{p}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \vec{F}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad , \quad i=1,3$$

or :

$$(15) \qquad \frac{d\vec{p}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) - \vec{p}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)$$

Tenant compte de (10), nous avons :

$$(16) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}$$

d'autre part, l'égalité (10) nous montre que :

$$(17) \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$$

de sorte que (14) devient, grâce à (2) et (15) :

$$(18) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\frac{\partial\vec{v}^2}{\partial\dot{q}_i}\right) - m\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i} - \vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i=1,3$$

Soit donc :

$$(19) \qquad S = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

On remarque aisément que :

$$(20) \qquad \frac{\partial S}{\partial\dot{q}_i} = \frac{m_0}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\partial\vec{v}^2}{\partial\dot{q}_i}$$

si bien que :

$$(21) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\frac{\partial\vec{v}^2}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial\dot{q}_i}$$

Il nous faut maintenant nous attaquer à la contribution du terme de force. Compte tenu des expressions (5), (6), et (7), la force de Lorentz peut s'écrire :

$$(22) \qquad \vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\,\Lambda\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)$$

Remarquant que :

$$(23) \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

$$(24) \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{v}\right) = \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{v}\,\Lambda\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}$$

nous obtenons :

$$(25) \qquad \vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}V - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{v}\right)\right)$$

Posant alors :

$$(26) \qquad U = q\left(V - \vec{A}.\vec{v}\right)$$

et remarquant que $\vec{A}$ et V ne sont pas fonction de $\vec{v}$:

$$(27) \qquad \vec{\nabla}_{\vec{v}}U = -q\vec{A} - q\vec{A}\,\Lambda\,\vec{\mathrm{rot}}_{\vec{v}}\left(\vec{v}\right) = -q\vec{A}$$

de sorte que :

$$(28) \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_{\vec{v}}U\right)$$

ce qui, dans le système de coordonnées généralisées se traduit par :

$$(29) \qquad \vec{F}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i}\right) \quad , \quad i=1,3$$

Reportant cette expression dans (18) en tenant compte de (21) :

$$(30) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial\dot{q}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i=1,3$$

Ainsi, notant le *Lagrangien* :

$$(31) \qquad L = S - U = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\left(V - \vec{A}.\vec{v}\right)$$

nous obtenons les *équations de Lagrange* :

$$(32) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1,3$$

1.2 Interprétation du Lagrangien

Le Lagrangien $L(q,\dot{q},t)$ est composé classiquement de 2 termes S et U que nous allons analyser :

Le terme S peut s'exprimer comme une fonction de l'énergie cinétique T de la particule. Son énergie totale étant donnée par :

$$(33) \qquad E = mc^2$$

l'énergie au repos étant notée :

$$(34) \qquad E_0 = m_0c^2$$

l'énergie cinétique s'exprime sous la forme :

$$(35) \qquad T = E - E_0 = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

de sorte que selon (19) :

$$(36) \qquad S = \frac{-m_0c^2}{1+\frac{T}{m_0c^2}} = \frac{-E_0}{1+\frac{T}{E_0}} = -\frac{E_0^2}{E}$$

Si l'énergie cinétique est petite devant l'énergie au repos, S prend la forme approchée :

$$(37) \qquad S \approx -E_0\left(1-\frac{T}{E_0}\right) = T - E_0$$

Ainsi, l'approximation de S en dynamique classique redonne bien l'énergie cinétique, à la constante près $-E_0$ qui n'a pas d'influence sur les équations de Lagrange.

Le terme U correspond à la contribution des forces extérieures. D'après (26), ces forces ne dérivent pas d'un potentiel en général : selon (26), c'est seulement le cas si le potentiel vecteur $\vec{A}$ est nul.

1.3 Principe de moindre action

Ce chapitre n'est pas essentiel pour la suite, mais il est toutefois utile de rappeler le lien avec le calcul des variations.

Considérons l'action du Lagrangien entre 2 instants t_1 et t_2, c'est à dire l'intégrale :

$$(38) \qquad I(q,\dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

q(t) désignant la solution des équations de Lagrange, soit δq une variation virtuelle infinitésimale de q telle que :

$$(39) \qquad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

$$(40) \qquad \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0$$

La variation correspondante de I s'écrit :

$$(41) \qquad \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \partial q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial \dot{q}_i \right) dt$$

remarquant que :

$$(42) \qquad \partial \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

il vient :

$$(43) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial \dot{q}_i \right) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \partial q_i dt$$

Compte tenu de (39), le 1er terme de droite est nul, de sorte que nous obtenons :

$$(44) \qquad \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \partial q_i \, dt = 0$$

Les δq_i étant des variations indépendantes, et les instants t_1 et t_2 choisis arbitrairement, nous concluons que le mouvement réel de la particule correspond à un extremum de l'action I.

1.4 Invariance des équations de Lagrange

Il est essentiel de vérifier que la forme des équations de Lagrange est invariante par changement de système de coordonnées. Ainsi, les conséquences de ces équations seront applicables indépendamment des coordonnées choisies ultérieurement.

Soit donc $L(q,\dot{q},t)$ le Lagrangien correspondant au système de coordonnées q et soit $\hat{q}$ un nouveau système de coordonnées qui se déduit de q par les relations :

$$(45) \qquad \hat{q} = \hat{q}(q,t)$$

De même, q se déduit de $\hat{q}$ par les relations :

$$(46) \qquad q = q(\hat{q},t)$$

Soit donc le nouveau Lagrangien $\hat{L}$ défini par :

$$(47) \qquad \hat{L}(\hat{q},\dot{\hat{q}},t) = L(q,\dot{q},t) = L(q(\hat{q},t),\dot{q}(\hat{q},t),t)$$

Nous obtenons aisément :

$$(48) \qquad \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial \hat{q}_i}$$

de sorte que :

$$(49) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}_i} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)\frac{\partial q_j}{\partial \hat{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \hat{q}_i} \right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \hat{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \hat{q}_i} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_i}$$

ce qui montre que $\hat{L}$ vérifie les équations de Lagrange.

1.5 Expression du Lagrangien en coordonnées (x,y,z)

Si l'on choisi le système de coordonnées cartésien, c'est à dire :

(50) $\quad q = (x,y,z) \quad ; \quad \dot{q} = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

le Lagrangien donné par (31) prend la forme suivante :

$$(51) \qquad L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}} - q\left(V - A_x\dot{x} - A_y\dot{y} - A_z\dot{z}\right)$$

où V, A_x, A_y, et A_z sont fonctions de (x,y,z) et éventuellement de t.

1.6 Expression du Lagrangien en coordonnées (r,θ,z)

Si l'on choisi le système de coordonnées cylindriques, c'est à dire :

(52) $\quad q = (r,\theta,z) \; ; \quad \dot{q} = (\dot{r},\dot{\theta},\dot{z})$

le Lagrangien donné par (31) prend la forme suivante :

$$(53) \qquad L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2}{c^2}} - q\left(V - A_r\dot{r} - A_\theta r\dot{\theta} - A_z\dot{z}\right)$$

2. Formalisme Hamiltonien

2.1 Variables conjuguées

Introduisons la notion de *moment généralisé* $\mathbf{p_j}$ associé à la coordonnée $\mathbf{q_j}$ par la relation :

$$(54) \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad , \qquad j=1,3$$

Ce moment généralisé $p = (p_1,p_2,p_3)$ est appelé moment canonique, ou moment conjugué de q. L'on dit également que (q,p) sont des variables conjuguées.

Si $q = (x,y,z)$, alors la formule (51) nous montre que :

$$(55) \qquad \begin{cases} p_x = p_x + qA_x = P_x \\ p_y = p_y + qA_y = P_y \\ p_z = p_z + qA_z = P_z \end{cases}$$

Autrement dit, le moment conjugué de q est égal à l'impulsion généralisée P, et diffère de l'impulsion mécanique *p* par la quantité qA.

Si par contre $q = (r,\theta,z)$, la formule (53) nous indique que :

$$(56) \qquad \begin{cases} p_r = p_r + qA_r = P_r \\ p_\theta = r(p_\theta + qA_\theta) = rP_\theta \\ p_z = p_z + qA_z = P_z \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas du système de coordonnées cylindrique, la deuxième composante du moment conjugué n'a pas les dimensions de l'impulsion...

remarque : l'on pourra se convaincre que le choix de '$r\theta$' au lieu de 'θ' comme seconde coordonnée généralisée ne serait pas judicieux et donnerait lieu à une expression difficile à exploiter du Lagrangien...

2.2 Hamiltonien et équations de Hamilton

La formule générale (54) étant introduite, considérons la fonction H, appelée Hamiltonien, et définie par :

$$(57) \qquad H = \dot{q}_i\, p_i - L(q,\dot{q},t)$$

A priori, H est fonction de q, mais l'on observe, toujours d'après (54), que :

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

de sorte que H est fonction uniquement de (q,p,t), tandis que L est lui fonction de $(q,\dot{q},t)$.
Par ailleurs, d'après les équations de Lagrange (32) :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{d}{dt}(p_i)$$

et :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(q_i)$$

Nous obtenons ainsi les équations de Hamilton, écrites sous forme condensées :

$$(58) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \nabla_p H \\ \dfrac{dp}{dt} = -\nabla_q H \end{cases}$$

remarque : Il faut éviter de placer des flèches sur les termes des équations de Hamilton ci-dessus ! Ceci pourrait en effet aboutir à une confusion dangereuse : Bien sûr, dans le cas ou les coordonnées généralisées q correspondent aux coordonnées cartésiennes (x,y,z), avec le repère fixe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, q et p correspondent au vecteur position $\vec{r}$ et au vecteur impulsion généralisée $\vec{P}$, mais cette correspondance n'a pas lieu pour les autres systèmes de coordonnées et en particulier pour (r,θ,z)... Il faut donc considérer que l'on a affaire à des « vecteurs » colonnes pour q et p, d'une autre nature que les vecteurs spatiaux auxquels on réserve la notation flèchée.

Examinons maintenant l'évolution de H au cours du temps :

$$(59) \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

L'on en déduit que si le Lagrangien ne dépend pas du temps, c'est à dire si les potentiels V et $\vec{A}$ sont statiques, l'Hamiltonien H est une constante du mouvement.

Explicitons à présent la signification de l'Hamiltonien H lorsque l'on a choisi le système de coordonnées cartésien ou le système cylindrique. Dans les 2 cas nous avons, compte tenu de (55) et (56) :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i p_i &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z &&= v_x P_x + v_y P_y + v_z P_z \\ &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{z}p_z &&= \dot{r}P_r + \dot{\theta}\left(rP_\theta\right) + \dot{z}P_z \\ & &&= \dot{r}P_r + \left(r\dot{\theta}\right)P_\theta + \dot{z}P_z \end{aligned}$$

c'est à dire, dans les 2 cas :

$$(60) \qquad \dot{q}_i p_i = \vec{v}.\vec{P} = \vec{v}.\left(\vec{p} + q\vec{A}\right)$$

de sorte que, d'après (26) et (36) :

$$\begin{aligned} (61) \qquad H &= \vec{v}.\left(\vec{p} + q\vec{A}\right) + \frac{E_0^2}{E} + q\left(V - \vec{A}.\vec{v}\right) \\ &= \frac{p^2c^2}{E} + \frac{E_0^2}{E} + qV \end{aligned}$$

mais d'après (2), (33) et (34) :

$$(62) \qquad E^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

si bien que :

$$(63) \qquad H = E + qV = E_0 + T + qV$$

L'Hamiltonien est donc égal à l'énergie relativiste de la particule augmentée de son énergie potentielle.

Remarque : Nous verrons par la suite que si l'on intervertit le temps et l'une des coordonnées généralisées, il apparaît un nouvel Hamiltonien, qui ne représente plus les mêmes quantités physiques, et qui n'est plus une constante du mouvement si le champ électromagnétique n'est pas statique...

2.3 Expression de l'Hamiltonien en coordonnées (x,y,z)

Compte tenu des formules (55) et (63), l'Hamiltonien prend la forme suivante dans le système de variables conjuguées issu des coordonnées cartésiennes :

$$(64) \qquad H = \left(E_0^2 + c^2\left(\left(p_x - qA_x\right)^2 + \left(p_y - qA_y\right)^2 + \left(p_z - qA_z\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} + qV$$

où A_x A_y A_z et V sont fonction de (x,y,z) et éventuellement de t.

2.4 Expression de l'Hamiltonien en coordonnées (r,θ,z)

Compte tenu des formules (56) et (63), l'Hamiltonien prend la forme suivante dans le système de variables conjuguées issu des coordonnées cylindriques :

$$(64) \qquad H = \left(E_0^2 + c^2 \left((p_r - qA_r)^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - qA_\theta \right)^2 + (p_z - qA_z)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + qV$$

où A_r A_θ A_z et V sont fonction de (r,θ,z) et éventuellement de t.

2.5 Changement de variable d'évolution

Nous abordons à présent un problème crucial : il nous faut montrer qu'il est possible d'intervertir la variable d'évolution « naturelle » que constitue le temps **t** et l'une des coordonnées généralisées $\mathbf{q_l}$, du moins sur un certain intervalle de temps **T**. Quand nous disons que c'est possible, nous voulons dire que c'est possible en conservant la structure caractéristique des équations de Hamilton, avec les nouvelles variables conjuguées.

Pour ce faire, trois problèmes doivent être résolus :

- déterminer la condition sur l'évolution du mouvement pour que l'interversion soit autorisée.
- trouver le moment conjugué $\mathbf{p_t}$ associé à la nouvelle coordonnée **t**.
- trouver le nouvel Hamiltonien, que nous noterons $\hat{\mathbf{H}}$, obéissant aux équations de Hamilton relatives aux nouvelles variables conjuguées.

Pourquoi tenons nous à garder la structure intrinsèque des équations de Hamilton ? Parce que c'est cette structure même qui garantit la symplecticité, et en particulier celle de la matrice de transfert au premier ordre ! Ce point sera abordé au chapitre IV.

Sans restreindre la généralité, cherchons à intervertir **t** et $\mathbf{q_1}$. Nous voulons donc passer du quadruplet :

$$(65) \qquad (q,p,t,H(q,p,t)) = (q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3,t,H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3,t))$$

vérifiant sur l'intervalle de temps [0,T] :

$$(66)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} &= \nabla_p H \\ \dfrac{dp}{dt} &= -\nabla_q H \end{cases}$$

au quadruplet :

$$(67)\qquad (\hat{q},\hat{p},q_1,\hat{H}(\hat{q},\hat{p},q_1)) \quad = \quad (t,q_2,q_3,p_t,p_2,p_3,q_1,\hat{H}(t,q_2,q_3,p_t,p_2,p_3,q_1))$$

vérifiant sur l'intervalle $(q_1(0),q_1(T))$:

$$(68)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\hat{q}}{dq_1} &= \nabla_{\hat{p}}\hat{H} \\ \dfrac{d\hat{p}}{dq_1} &= -\nabla_{\hat{q}}\hat{H} \end{cases}$$

Nous savons déjà que :

$$(69)\qquad \begin{cases} \hat{q}_1 &= t \\ \hat{q}_2 &= q_2 \quad ; \quad \hat{q}_3 = q_3 \\ \hat{p}_2 &= p_2 \quad ; \quad \hat{p}_3 = p_3 \end{cases}$$

et que la nouvelle variable d'évolution n'est autre que q_1

Il nous reste donc, comme déjà mentionné, à trouver $\hat{p}_t$, $\hat{H}$, et la condition sur H pour réaliser (68). Un argument de dimensionnalité va nous aider : pour que le nouvel Hamiltonien $\hat{H}$ soit de la forme $\dfrac{d\hat{q}_i}{dq_1}\hat{p}_i - \hat{L}$, il faut que $\dfrac{dt}{dq_1}p_t$ soit de même dimension que $\dfrac{d\hat{q}_2}{dq_1}\hat{p}_2$, c'est à dire que $\dfrac{dq_2}{dt}\dfrac{dt}{dq_1}p_2$.

Autrement dit, que p_t soit de même dimension que $\dfrac{dq_2}{dt}p_2$ et donc que H.

De même, $\hat{H}$ doit être de même dimension que $\dfrac{d\hat{q}_2}{dq_1}\hat{p}_2$, donc que $\dfrac{q_2}{q_1}p_2$ et $\dfrac{q_1}{q_1}p_1$ et donc que p_1.

Nous essayons le plus simple :

$$(70)\qquad \hat{p}_t = \varepsilon H \qquad \text{où } \varepsilon \text{ est une constante arbitraire}$$

$$(71)\qquad \hat{H} = \varepsilon' p_1 \qquad \text{où } \varepsilon' \text{ est une constante arbitraire}$$

Calculons la dérivée totale de (70) :

$$(72)\qquad \varepsilon\, d\hat{p}_t = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i$$

et isolons dp_1 pour obtenir :

$$(73) \qquad dp_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)^{-1}\left(-\frac{\partial H}{\partial t}dt - \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \varepsilon\, d\hat{p}_t - \sum_{i\neq 1}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i \right)$$

en supposant que pendant l'intervalle de temps (0,T), la dérivée partielle $\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1$ ne s'annule jamais : ceci correspond au fait que physiquement, la variable généralisée q_1 représente la *direction privilégiée* de la particule, qui ne doit donc pas « revenir en arrière »...
Effectuant maintenant la même opération à partir de l'égalité (70) :

$$(74) \qquad dp_1 = \varepsilon'\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t}dt + \sum_{i\neq 1}\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i}d\hat{q}_i + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_t}d\hat{p}_t + \sum_{i\neq 1}\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}d\hat{p}_i \right)$$

et comparant (71) et (72), nous obtenons, compte tenu de (59), de (69) et du fait que H vérifie les équations de Hamilton (66) :

$$(75) \qquad \begin{cases} \varepsilon'\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_t} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)^{-1} = \varepsilon\dfrac{dt}{dq_1} \\ \varepsilon'\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)^{-1}\dfrac{\partial H}{\partial p_i} = -\dfrac{d\hat{q}_i}{dq_1} \qquad i>2 \\ \varepsilon'\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)^{-1}\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)^{-1}\dfrac{dH}{dt} = -\varepsilon\dfrac{d\hat{p}_t}{dq_1} \\ \varepsilon'\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)^{-1}\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{d\hat{p}_i}{dq_1} \qquad i>2 \end{cases}$$

L'on remarque alors aisément que pour obtenir les équations de Hamilton (68) avec $\hat{H}(\hat{q},\hat{p},q_1)$, il faut *nécessairement* choisir :

$$\varepsilon = \varepsilon' = -1$$

de sorte que le moment conjugué $\hat{p}_t$ associé au temps t est en fait égal à **-H** , tandis que l'Hamiltonien $\hat{H}$ du nouveau système est égal à $-p_1$.

2.6 Exemple de changement de variable d'évolution

Le raisonnement précédent étant un peu abstrait, voyons ce qui se produit sur l'exemple simple d'un particule relativiste de charge positive, située à l'origine à l'instant 0, restant dans le plan (x,y) et soumise à un champ électrique E_x constant et parallèle à l'axe des x.

Nous avons :

$$(76) \quad \begin{cases} V = -E_x x \\ A = 0 \end{cases}$$

de sorte que l'Hamiltonien « en temps » s'écrit :

$$(77) \quad H = E + qV = \left(E_0^2 + c^2\left(p_x^2 + p_y^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} - qE_x x$$

les équations de Hamilton associées devenant :

$$(78) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = c^2 \dfrac{p_x}{H + qE_x x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = c^2 \dfrac{p_y}{H + qE_x x} \\ \dfrac{dp_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = qE_x \\ \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation nous donne :

$$(79) \quad p_x = p_x^0 + qE_x t$$

Reportant cette égalité dans la première équation et remarquant que H est constant du fait que V et A sont statiques, il vient :

$$(80) \quad x(t) = \frac{1}{qE_x}\left(-H + \left(H^2 + 2qE_x c^2\left(p_x^0 t + \frac{qE_x}{2} t^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

L'expression en temps située sous la racine étant positive ou nulle $\forall$ t, on peut noter que cette formule est valide même si p_x^0 est positif à l'instant 0 et si le champ électrique E_x est négatif. Dans un tel cas, la particule commence par avancer, puis rebrousse chemin.

La quatrième équation de (78) nous indique que p_y est une constante, égale à p_y^0. Ce n'est pas le cas la composante v_y de la vitesse du fait que la masse relativiste varie ! Pour trouver y(t), il faut alors reporter l'expression (80) donnant x(t) dans la deuxième équation de (78) puis intégrer. Bien entendu, ceci est inutile si $p_y^0 = 0$.

Examinons maintenant le cas où x *est la variable d'évolution.* Tout d'abord l'on remarque que l'interversion de t et de x n'est licite que si la dérivée partielle de H par rapport à p_x ne s'annule pas ! Si E_x et p_x^0 sont de même signe, il n'y a pas de problème. Par contre, si par exemple p_x^0 est positif et E_x négatif, alors on peut utiliser x comme variable d'évolution jusqu'à la position x(T), correspondant à l'instant T où la particule rebrousse chemin :

$$T < -\frac{p_x^0}{qE_x} \tag{81}$$

La valeur x(T) peut être calculée avec (80), mais ceci suppose que le problème est résolu avec l'Hamiltonien en temps...En pratique ceci n'est pas gênant car il est rare qu'une particule rebrousse chemin dans nos lignes de transfert...

Ces conditions étant satisfaites, l'Hamiltonien « en x » $\hat{H}$ se déduit en utilisant les formules (70), (71) et (77) :

$$\hat{H}(t, y, \hat{p}_t, p_y, x) = -\frac{1}{c}\left(\left(-\hat{p}_t + qE_x x\right)^2 - E_0^2 - c^2 p_y^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{82}$$

les équations de Hamilton associées étant :

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_t} = \dfrac{\hat{p}_t - qE_x x}{c^2 \hat{H}} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial p_y} = -\dfrac{p_y}{\hat{H}} \\ \dfrac{d\hat{p}_t}{dx} = -\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{dp_y}{dx} = -\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{83}$$

On en déduit immédiatement du fait que le potentiel est nul à l'origine ::

$$(84)\qquad \begin{cases} \hat{p}_t = \hat{p}_t^0 = -E = -m_0c^2\left(1+\dfrac{p_x^{0^2}+p_y^{0^2}}{m_0^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_y = p_y^0 \end{cases}$$

Ainsi, la première équation de (83) ne dépend que de t et x et peut être résolue aisément.

2.7 Introduction de la matrice J

Compte tenu du résultat du § 2.5, et sauf mention du contraire, nous conserverons la notation « en temps » pour les équations de Hamilton, tout en ayant à l'esprit que la variable d'évolution peut être une autre variable que le temps.

Si l'on note **u** le couple de variables conjuguées (q,p), on remarque que le système de Hamilton (58) peut également s'écrire :

$$(85)\qquad \frac{du}{dt} = J.\nabla_u H = F(u(t),t))$$

où **J** est la matrice de dimension (2n,2n) :

$$(86)\qquad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

I désignant la matrice identité de dimension n , où n est la dimension d'espace. En général, J est de dimension (6,6).
On remarque immédiatement que :

$$(87)\qquad \begin{cases} J^2 = -I \\ J^{-1} = J^t = -J \end{cases}$$

Remarque : Pour simplifier les notations, on note également I la matrice identité de dimension (2n,2n)...

La matrice J joue un rôle fondamental dans la théorie symplectique.

2.8 Changement d'ordre des variables

Jusqu'à présent, nous avons adopté l'ordre « naturel » des variables conjuguées :

(88) $u = (q,p) = (q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)$

Dans certains cas, il est intéressant d'utiliser l'ordre suivant :

(89) $w = (q_1,p_1,q_2,p_2,q_3,p_3)$

notant alors :

(90) $$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on vérifie que :

(91) $$\begin{cases} w = Gu \\ \nabla_w = G\nabla_u \end{cases}$$

de sorte que le système (85) devient :

(92) $$\frac{dw}{dt} = \left(GJG^{-1}\right)\nabla_w H = K\nabla_w H$$

avec :

(92) $$K = GJG^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

(93) $$\begin{cases} K^2 = -I \\ K^{-1} = K^t = -K \end{cases}$$

2.9 Solution des équations de Hamilton dans le cas linéaire

Dans le cas général, la résolution des équations de Hamilton pour une particule nécessite un calcul numérique approché. Cependant, lorsque le système se présente sous la forme linéaire :

$$(94) \qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = J\nabla_u H(u(t),t) = Au(t) + b(t) \\ u(0) = u_0 = (q_0, p_0) \end{cases}$$

où A est une matrice à coefficients constants de dimension (2n,2n), et b un vecteur colonne de dimension 2n, dépendant éventuellement du temps, la **solution exacte et unique** est donnée par :

$$(95) \qquad u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau$$

avec :

$$(96) \qquad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots$$

Le calcul de la solution se réduit alors à l'évaluation d'une exponentielle de matrice, qui ne pose pas de problème particulier, la série étant convergente du fait que A est constante , donc bornée.

Cette situation très favorable se produit en fait assez souvent, en particulier lorsque la variation de masse relativiste est négligeable, le potentiel vecteur $\vec{A}$ linéaire (champ magnétique constant), et le potentiel scalaire V quadratique (ou nul). On peut citer le cas des dipôles « hard-edge », et même celui de l'inflecteur de Muller !

3. Matrices symplectiques

Ce chapitre purement algébrique est une introduction aux matrices symplectiques. Il est indépendant des chapitres précédents. Le lien avec le formalisme Hamiltonien sera fait au chapitre IV.

3.1 Définition

Etant donnée la matrice **J** de dimension (2n,2n) définie comme au paragraphe 2.7 selon :

$$(97) \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

et vérifiant donc les propriétés :

$$(98) \qquad \begin{cases} J^2 = -I \\ J^{-1} = J^t = -J \end{cases}$$

une matrice **T** de dimension (2n,2n) est dite symplectique si elle vérifie la relation :

$$(99) \qquad T^t J T = J$$

Cette égalité induit des relations entre les coefficients de la matrice T, que l'on appelle les relations symplectiques.

3.2 Propriétés

L'ensemble de matrices symplectiques de dimension (2n,2n) constitue un **groupe pour la multiplication** :

La matrice identité **I** vérifie la relation (99). Notons au passage que **J** est elle-même symplectique.

Etant donnée un matrice symplectique T, la relation (99) nous indique que :

$$(100) \qquad \det(T) = \pm 1$$

de sorte que T est inversible, et l'on vérifie aisément que :

$$(101) \qquad T^{-1} = -J T^t J$$

Vérifions que T^{-1} est symplectique :

$$(102) \qquad \left(T^{-1}\right)^t J T^{-1} = \left(-J^t T J^t\right) J \left(-J T^t J\right) = -J \left(T J T^t\right) J$$

or :

$$I \quad = \quad TT^{-1} \quad = \quad -\left(TJT^{t}\right)J$$

de sorte qu'en multipliant à droite par J, l'on obtient au passage la relation :

(103) $$TJT^{t} \quad = \quad J$$

qui injectée dans (102) montre la symplecticité de T^{-1}.

Il reste à vérifier que le produit de 2 matrices symplectiques est symplectique. Soient donc T et U deux matrices vérifiant (99). Nous avons :

$$(TU)^{t} J(TU) \quad = \quad U^{t}\left(T^{t} JT\right)U \quad = \quad U^{t} JU = \quad J$$

Le groupe des matrices symplectiques de dimension (2n,2n) est noté Sp(2n). Mais il n'est pas commutatif ! En effet pour n égal à 1 , si l'on prend les deux matrices symplectiques :

$$T_1 \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_2 \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on observe que :

$$T_1 T_2 \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_2 T_1 \quad = \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On notera également que si T est un matrice symplectique, -T l'est aussi, mais λT ne l'est pas si λ est différent de ± 1. D'autre part, la somme de 2 matrices symplectiques n'est pas symplectique.

On admettra sans démonstration que le déterminant d'une matrice symplectique est en fait **toujours égal à 1.**

3.3 Exemples

Soient S une matrice symétrique quelconque , non nécessairement inversible, de dimension (2n,2n) et T la matrice définie par :

(104) $$T \quad = \quad e^{JS}$$

Nous avons :

(105) $$T^{t} \quad = \quad I + SJ^{t} + \frac{SJ^{t}SJ^{t}}{2!} + \ldots \quad = \quad e^{-SJ}$$

de sorte que :

$$T^t J T = e^{-SJ} J e^{JS} = J\left(J^{-1} e^{-SJ} J\right) e^{JS}$$
$$= J e^{-JS} e^{JS} = J$$

Les matrices de la forme (104) sont donc symplectiques. De plus, S étant une matrice symétrique quelconque, son nombre de coefficients indépendants est égal à n(2n+1) de sorte que le nombre de relations symplectiques indépendantes induites par les $4n^2$ égalités engendrées par (99) quand T est de la forme (104) est égal à :

$$4n^2 - n(2n+1) = n(2n-1)$$

c'est à dire :

1	pour les matrices (2,2) (det(T) = 1)
6	pour les matrices (4,4)
15	pour les matrices (6,6)

Examinons les matrices vérifiant (104) dans le cas où n est égal à 1. La matrice S prend la forme :

(106) $$S = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

si bien que :

(107) $$JS = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & b \\ -a & -c \end{bmatrix} = Q$$

(108) $$(JS)^2 = -(ab-c^2)I$$

notant :

(109) $$d = \det(S) = ab-c^2$$

on observe que :

$$(JS)^{2k} = (-1)^k (d)^k I$$

$$(JS)^{2k+1} = JS(JS)^{2k} = (-1)^k (d)^k Q$$

si bien que dans les cas où le déterminant de S est strictement positif :

(110) $$e^{JS} = I + \frac{1}{\sqrt{d}}\sqrt{d}\,Q - \frac{\left(\sqrt{d}\right)^2}{2!} I - \frac{1}{\sqrt{d}}\frac{\left(\sqrt{d}\right)^3}{3!} Q + \ldots.$$
$$= \cos\left(\sqrt{d}\right) I + \frac{1}{\sqrt{d}} \sin\left(\sqrt{d}\right) Q$$

La matrice de Twiss apparaît ainsi « naturellement » ; en effet, notant :

$$\mu = \sqrt{d} \qquad \alpha = \frac{c}{\sqrt{d}}$$

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{d}} \qquad \gamma = \frac{a}{\sqrt{d}}$$

vérifiant :

(111) $$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$$

il vient :

(112) $$e^{JS} = \begin{bmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{bmatrix}$$

remarque : si le déterminant de S est négatif, les cosinus et sinus sont remplacés par des cosinus et sinus hyperboliques...

3.4 Représentation exponentielle

Nous venons de voir que les matrices de la forme e^{JS} sont symplectiques. Le problème est maintenant de savoir si toutes les matrices symplectiques ont une forme analogue.

Nous savons déjà qu'une matrice symplectique est non singulière. Elle peut donc se décomposer de façon unique sous la forme :

(113) $$T = PH$$

où P est une matrice symétrique définie positive et H une matrice orthogonale, vérifiant donc respectivement :

(114) $$P = P^t \quad \text{et} \quad x^t P x > 0 \quad \forall x \in R^{2n},\ x \neq 0$$

(115) $$HH^t = H^t H = I$$

La condition symplectique (99) sur T nous donne :

(116) $$T = J^{-1}\left(T^t\right)^{-1} J = J^{-1}\left(H^t P\right)^{-1} J = J^{-1} P^{-1} H J$$

de sorte que :

(117) $$PH = \left(J^{-1} P^{-1} J\right)\left(J^{-1} H J\right)$$

notant :

$$\hat{P} = J^{-1} P^{-1} J \quad \text{et} \quad \hat{H} = J^{-1} H J$$

vérifions que $\hat{P}$ et $\hat{H}$ sont respectivement symétriques définies positives et orthogonales :

$$\hat{P}^t = J^t \left(P^{-1}\right)^t \left(J^{-1}\right)^t = J^{-1} P^{-1} J = \hat{P}$$

$$\forall x \in R^{2n},\ x \neq 0 \qquad x^t \hat{P} x = \left(x^t J^{-1} P^{-1}\right) P \left(P^{-1} J x\right) > 0$$

d'autre part :

$$\hat{H}\hat{H}^t = J^{-1} H J J^t H^t \left(J^{-1}\right)^t = J^{-1} H H^{-1} J = I$$

$$\hat{H}^t \hat{H} = J^t H^t \left(J^{-1}\right)^t J^{-1} H J = J^t H^{-1} H J = I$$

La décomposition de T étant unique, l'on en déduit :

(118) $$P = J^{-1} P^{-1} J$$

(119) $$H = J^{-1} H J$$

si bien que :

$$P^t J P = P J J^{-1} P^{-1} J = J$$

$$H^t J H = H^{-1} J J^{-1} H J = J$$

Autrement dit, les matrices P et H sont elles-mêmes symplectiques. On en déduit que la matrice orthogonale H possède un déterminant égal à 1, et correspond donc toujours à une rotation.

Remarque : On se souvient d'autre part que les matrices symétriques définies positives interviennent dans les problèmes de diffusion de la chaleur ou de mécanique des fluides : elles apparaissent quand on discrétise, par une méthode de différences finies ou d'éléments finis, le Laplacien de l'équation de la chaleur ou celui du terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes. Ainsi l'on peut interpréter toute matrice symplectique en disant qu'elle provoque sur un vecteur colonne un rotation suivie d'une diffusion (conservant le « volume »). En particulier, même un « drift » ou une lentille mince peuvent s'interpréter de cette façon ! (dans l'espace des phases).

Cette première étape étant franchie, il reste à exprimer P et H sous forme d'exponentielles de matrices. Nous admettrons ici que du fait que P est symétrique définie positive, elle peut s'écrire sous la forme :

(120) $$P = e^A$$

où A est une matrice unique et symétrique. Précisons les propriétés de A. Grâce à (118), il vient :

(121) $$P = e^{-J^{-1}AJ}$$

de sorte que :

(122) $A = -J^{-1} A J$

et :

(123) $JA = -AJ$

Introduisons la matrice :

(124) $S^a = -JA$

L'on remarque grâce à (123) que :

$$\left(S^a\right)^t = -A^t J^t = AJ = -JA = S^a$$

S^a est don une matrice symétrique, et de plus :

(125) $JS^a = A = JAJ = -S^a J$

ce qui montre que P peut se mettre sous la forme :

(126) $P = e^{JS^a}$

où S^a est une matrice symétrique qui anticommute avec J.

Examinons maintenant ce qui se passe pour H. Nous savons que H est orthogonal, qu'elle est symplectique et correspond même à une rotation. Elle peut donc se mettre sous la forme :

(127) $H = e^B$

où B est une matrice unique, et antisymétrique c'est à dire :

(128) $B^t = -B$

Grâce à (119), il vient :

(129) $H = e^{J^{-1}BJ}$

de sorte que :

(130) $B = J^{-1} BJ$

et :

(131) $JB = BJ$

Introduisons la matrice :

(132) $S^c = -JB$

L'on remarque grâce à (131) que :

$$(133) \qquad \left(S^c\right)^t = -B^t J^t = -BJ = -JB = S^c$$

La matrice S^c est donc symétrique, et de plus :

$$(134) \qquad JS^c = B = -JBJ = S^c J$$

ce qui montre que H peut se mettre sous la forme :

$$(135) \qquad H = e^{JS^c}$$

où S^c est une matrice symétrique qui commute avec J.

En résumé, nous avons montré que toute matrice symplectique se décompose de manière unique sous la forme :

$$(136) \qquad T = e^{JS^a} e^{JS^c}$$

où S^a est une matrice symétrique qui anticommute avec J et S^c est une matrice symétrique qui commute avec J.

3.5 Paramétrisation

La représentation exponentielle générale (136) permet de paramétrer l'ensemble des matrices sympletiques c'est à dire de les exprimer en fonction de coefficients arbitraires, dont le nombre dépend évidemment de n.

Examinons tout d'abord le nombre de coefficients indépendants d'un matrice S^a symétrique et qui anticommute avec J. Une telle matrice se décompose sous la forme :

$$(137) \qquad S^a = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^t & S_{22} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{11} = S_{11}^t \quad \text{et} \quad S_{22} = S_{22}^t$$

vérifiant :

$$(138) \qquad JS^a = \begin{bmatrix} S_{12}^t & S_{22} \\ -S_{11} & -S_{12} \end{bmatrix} = -S^a J = \begin{bmatrix} S_{12} & -S_{11} \\ S_{22} & -S_{12}^t \end{bmatrix}$$

ce qui se résume en :

$$(139) \qquad S^a = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & -S_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{11} = S_{11}^t \quad \text{et} \quad S_{12} = S_{12}^t$$

de sorte que le nombre de coefficients indépendants est :

$$n_a = 2\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right) = n(n+1)$$

De même une matrice S^c symétrique qui commute avec J se décompose sous la forme :

$$(140) \qquad S^c = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^t & S_{22} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{11} = S_{11}^t \quad \text{et} \quad S_{22} = S_{22}^t$$

vérifiant :

$$(141) \qquad JS^c = \begin{bmatrix} S_{12}^t & S_{22} \\ -S_{11} & -S_{12} \end{bmatrix} = S^c J = \begin{bmatrix} -S_{12} & S_{11} \\ -S_{22} & S_{12}^t \end{bmatrix}$$

ce qui se résume en :

$$(142) \qquad S^c = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ -S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{11} = S_{11}^t \quad \text{et} \quad S_{12} = -S_{12}^t$$

de sorte que le nombre de coefficients indépendants est :

$$n_c = \left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)+\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = n^2$$

Ainsi, notant $n_p = n_a+n_c$ le nombre de paramètres indépendants de la matrice symplectique et n_r le nombre de relations symplectiques indépendantes, on peut dresser le tableau récapitulatif en fonction de la dimension d'espace n :

dimension	dim(T)	n^a	n^c	n_p	n_r
n	(2n,2n)	n(n+1)	n^2	n(2n+1)	n(2n-1)
1	(2,2)	2	1	3	1
2	(4,4)	6	4	10	6
3	(6,6)	12	9	21	15

4. Matrices de transfert et symplecticité

Nous allons monter ici que le développement des équations de Hamilton au premier ordre aboutit à une matrice de transfert symplectique. Pour ce faire, nous commencerons par introduire la notion générale de transformation symplectique, puis nous montrerons que les systèmes Hamiltoniens sont des transformations symplectiques. Enfin nous ferons apparaître la matrice de transfert, c'est à dire la matrice qui régit au premier ordre la transformation de petites variations de la condition initiale par rapport à une particule de référence.

4.1 Notion de transformation symplectique

Considérons une fonction Γ , notée aussi u, dérivable et définie comme suit :

$$(144) \qquad \begin{cases} \Gamma : & \left(R^{2n}, R^{+}\right) & \rightarrow & R^{2n} \\ & \left(u^0, t\right) & \mapsto & \Gamma\left(u^0, t\right) = u\left(u^0, t\right) \end{cases}$$

vérifiant à l'instant initial :

$$(145) \qquad \Gamma\left(u^0, 0\right) = u\left(u^0, 0\right) = u^0$$

Considérons la matrice T fonction également de (u^0,t) et définie comme le jacobien de la transformation Γ, c'est à dire :

$$(146) \qquad T = T\left(u^0, t\right) = \left[\frac{\partial \Gamma_i\left(u^0, t\right)}{\partial u_j^0}\right]$$

soit encore :

$$(147) \qquad T_{ij}\left(u_0, t\right) = \frac{\partial u_i\left(u^0, t\right)}{\partial u_j^0} \qquad i = 1,2n \qquad ; \qquad j = 1,2n$$

L'on dit que Γ est une *transformation symplectique* (symplectic map) si quelques soient u^0 et t, la matrice jacobienne T est symplectique, c'est à dire :

$$(148) \qquad T^t J T = J$$

Il faut bien voir que les transformations de cette nature sont très particulières : bien que la matrice T dépende de (u^0,t), le produit T^tJT n'en dépend pas !

La matrice jacobienne de la transformation possédant un déterminant non nul, Γ est inversible. D'autre part, la transformation identité est évidemment symplectique, et comme le jacobien de la composition de

2 transformations est égal au produit des 2 jacobiens, on montre aisément que les transformations symplectiques constituent un groupe au même titre que le groupe des matrices symplectiques.

4.2 Caractère symplectique des systèmes Hamiltoniens

Considérons à présent le système de Hamilton tel que défini au chapitre II, c'est à dire :

$$(149) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = J\nabla_u H \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

Nous savons qu'il existe une solution unique u(t) pour chaque condition initiale u^0. On peut donc considérer la transformation Γ qui à (u^0,t) associe $\Gamma(u^0,t)$ comme étant la solution u(t), que l'on peut d'ailleurs noter $u(u^0,t)$.On a coutume d'appeler l'ensemble de toutes les trajectoires un « flot Hamiltonien ».

Notre objectif est de montrer que la transformation Γ est symplectique, la difficulté étant que nous ne savons pas intégrer le système (149) dans le cas général : nous ne pouvons donc pas donner explicitement $\Gamma(u^0,t)$ puis calculer la matrice jacobienne et examiner ses propriétés. Pour aboutir, nous allons considérer Γ comme une suite de transformations *exactes* opérant sur des intervalles de temps successifs.

Supposons donc que le flot Hamiltonien est défini sur l'intervalle de temps [0,t] et subdivisons cet intervalle en N pas de temps constants de durée :

$$(150) \qquad h = \frac{t}{N} \quad \text{avec} \quad t_m = mh$$

Appliquant le développement de Taylor dans chaque intervalle de temps nous pouvons écrire, en tenant compte de (149) :

$$(151) \qquad \begin{aligned} u(t_{m+1}) &= u(t_m) + h\frac{du}{dt}(t_m) + o(h^2) \\ &= u(t_m) + hJ\nabla_u H(u(t_m),t_m) + o(h^2) \end{aligned}$$

Calculons alors la matrice jacobienne, notée T_{m+1} de la transformation décrite par (151) et faisant passer de $(u(t_m),t_m)$ à $u(t_{m+1})$. Il vient :

$$(152) \qquad T_{m+1} = I + hJS_m + o(h^2)$$

où S_m est la matrice *symétrique* par construction :

$$(153) \qquad S_m = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}(u(t_m),t_m)\right]$$

Effectuant le produit des matrices T_m, nous obtenons :

$$(154) \qquad T = \prod_{1}^{N}(I+hJS_{m-1}) + N.o(h^2)$$

Cette matrice est la matrice jacobienne exacte de la transformation complète faisant passer de u^0 à u(t), du fait que nous avons pris soin de garder tous les termes des développements de Taylor.
Par ailleurs, les matrices de la forme « I + h J S » sont symplectiques au moins jusqu'aux termes d'ordre h, en effet :

$$\begin{aligned}(I+hJS)^t J(I+hJS) &= (I - hSJ)J(I+hJS)\\ &= J + hS - hS + h^2 SJS\\ &= J + o(h^2)\end{aligned}$$

de sorte qu'en regroupant une nouvelle fois les termes en $o(h^2)$ et en tenant compte de (150), la matrice T peut s'écrire :

$$(155) \qquad T = T_h + o(h)$$

où T_h est une matrice symplectique.

Faisant tendre h vers 0, l'on observe que la suite des matrices symplectiques T_h converge vers la matrice T. D'autre part, quelque soit h :

$$\begin{aligned}T^t J T &= (T-T_h)^t J T + (T_h)^t J T_h + (T_h)^t J(T-T_h)\\ &= (T-T_h)^t J T + J + (T_h)^t J(T-T_h)\end{aligned}$$

Le premier et le troisième termes du second membre tendant vers 0 quand h tend vers 0, on en conclut que la matrice T est elle-même symplectique, ce qui achève la démonstration.

4.3 Matrices de transfert

Montrons que la matrice jacobienne de la transformation Γ est en fait la matrice de transfert au premier ordre du système de Hamilton.

Soit u^0 une condition initiale particulière et Δu^0 une petite variation. Nous avons :

$$(156) \qquad \Gamma_i(u^0+\Delta u^0,t) = \Gamma_i(u^0,t) + \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial \Gamma_i(u^0,t)}{\partial u_j^0}\Delta u_j^0 + \ldots \quad i=1,2n$$

soit en notation matricielle :

$$(157) \qquad \Gamma(u^0+\Delta u^0,t) = \Gamma(u^0,t) + T\Delta u^0 + \ldots$$

notant alors :

(158) $\Delta u = u\left(u^0+\Delta u^0,t\right) - u\left(u^0,t\right) = \Gamma\left(u^0+\Delta u^0,t\right) - \Gamma\left(u^0,t\right)$

on en déduit :

(159) $\Delta u = T\Delta u^0$

Attention : Nous avons obtenu une matrice de transfert symplectique parce que la variable u est constituée des variables conjuguée (q,p) obéissant à un système Hamiltonien ! En particulier, nous avons vu que la matrice J, caractéristique de ces systèmes, jouait un rôle fondamental dans les démonstrations. Si par contre on utilise le système de Lorentz, c'est à dire l'équation fondamentale de la dynamique mise sous la forme :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m}\Lambda\,\vec{rot}\vec{A}\right)$$

on peut trouver une matrice de transfert régissant l'évolution des variations $\left(\Delta\vec{x},\Delta\vec{p}\right)$, mais cette matrice *n'est pas symplectique* en général ! ! !

4.4 Changement d'ordre des variables

Les calculs précédents ont été effectués en utilisant la matrice J. Ils auraient pu être menés avec la matrice K introduite au paragraphe 2.8. Mais on peut directement vérifier le caractère symplectique de la matrice que l'on aurait obtenue :

Soit en effet le changement d'ordre des variables défini en 2.8 :

(160) $\Delta w^0 = G\Delta u^0$; $\Delta w = G\Delta u$

On obtient d'après (159) :

(161) $\Delta w = GTG^{-1}\Delta w^0 = T_w\Delta w^0$

d'où la symplecticité de T_w, en remarquant que $G^{-1} = G^t$:

$$T_w^t K T_w = \left(GTG^{-1}\right)^t K\left(GTG^{-1}\right) = GT^tG^tGJG^{-1}GTG^{-1}$$
$$= GJG^{-1} = K$$

4.4 Calcul approché dans le cas général

La matrice de transfert T ne peut pas être calculée analytiquement dans le cas général :

Une première difficulté provient de l'évaluation du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur $\vec{A}$. Au Ganil, le potentiel V est calculé par exemple avec le logiciel CHA3D, tandis que le potentiel $\vec{A}$ est calculé avec le logiciel TOSCA.

Ensuite, il faut intégrer les équations du mouvement : 2 solutions sont possibles, soit intégrer les équations de Hamilton, soit intégrer les équations de Lorentz. C'est cette dernière méthode que nous utilisons en général. On peut d'ailleurs le regretter : Bien sûr, le système de Hamilton nécessite la connaissance explicite du potentiel vecteur au lieu du champ magnétique. Mais c'est justement ce potentiel qui est calculé dans des logiciels comme TOSCA, le champ B étant déduit par dérivation. Par ailleurs, dans les cas ou le potentiel dépend du temps, il intervient de toute façon explicitement dans le champ électrique... Par contre, il faut reconnaître que le champ magnétique est plus « parlant » ...

Considérons donc les cas où nous effectuons une intégration avec les variables $(\vec{x}, \vec{p})$ et le temps comme variable d'évolution, en utilisant les équations de Lorentz. Intégrant successivement le mouvement de la particule de référence, puis 6 autres particules différant de la particule centrale par une petite variation selon chacune des 6 variables, nous pouvons déduire la matrice de transfert de Lorentz, notée T_L selon :

$$\Delta v = T_L \, \Delta v^0 \tag{162}$$

où :

$$\Delta v^0 = \left(\Delta q^0, \Delta p^0\right) = \left(\Delta x^0, \Delta y^0, \Delta z^0, \Delta p_x^0, \Delta p_y^0, \Delta p_z^0\right) \tag{163}$$
$$\Delta v = \left(\Delta q, \Delta p\right) = \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z\right)$$

Comme déjà indiqué, T_L n'est pas symplectique du fait que le système de Lorentz n'est pas Hamiltonien. Cependant nous pouvons déduire aisément la matrice symplectique T que nous aurions obtenu en intégrant les équations de Hamilton :

Soit donc :

$$\Delta u = T \Delta u^0 \tag{164}$$

où :

$$\begin{cases} \Delta u^0 = \left(\Delta q^0, \Delta p^0\right) = \left(\Delta x^0, \Delta y^0, \Delta z^0, \Delta p_x^0, \Delta p_y^0, \Delta p_z^0\right) \\ \Delta u = \left(\Delta q, \Delta p\right) = \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z\right) \\ T^t J T = J \end{cases} \tag{165}$$

Nous savons d'après (55) que :

$$\begin{cases} p = P = p + q A(x,y,z,t) \\ p+\Delta p = P + \Delta P = p + \Delta p + q A(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) \end{cases} \tag{166}$$

de sorte que par soustraction et développement au premier ordre de A :

$$(167)\qquad \begin{cases} \Delta p^0 &= \Delta p^0 &+ \Omega_0\,\Delta q^0 \\ \Delta p &= \Delta p &+ \Omega\ \Delta q \end{cases}$$

où Ω_0 et Ω désignent respectivement le jacobien de qA à l'instant initial et à l'instant final :

$$(168)\qquad \begin{cases} \Omega_0 &= q\begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}(x^0, y^0, z^0) \\ \Omega &= q\begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

Ainsi l'on peut passer des variables $(\Delta q, \Delta p)$ aux variables $(\Delta q, \Delta p)$ par les relations :

$$(169)\qquad \begin{cases} \Delta u^0 &= R_0\,\Delta v^0 \\ \Delta u &= R\ \Delta v \end{cases}$$

où :

$$(170)\qquad R_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega_0 & I \end{bmatrix} \quad ; \quad R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega & I \end{bmatrix}$$

Combinant (162), (164) et (169), nous obtenons quelque soit Δu^0 :

$$\Delta u = T\Delta u^0 = R\Delta v = R\,T_L\,\Delta v^0 = R\,T_L\,R_0^{-1}\,\Delta u^0$$

d'où les formules de passage :

$$(171)\qquad \begin{cases} T &= R\ T_L\ R_0^{-1} \\ T_L &= R^{-1}\,T\,R_0 \end{cases}$$

où les matrices inverses se déduisent facilement de (170) :

$$(172)\qquad R_0^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega_0 & I \end{bmatrix} \quad ; \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Omega & I \end{bmatrix}$$

L'on peut se demander dans quels cas la matrice de transfert de Lorentz T_L est quand même symplectique. Elle l'est en particulier si R_0 et R le sont. C'est à dire si pour R et R_0 :

$$R^t J R = \begin{bmatrix} I & \Omega^t \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \Omega & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega - \Omega^t & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = J$$

La condition $\Omega = \Omega^t$ est équivalente à $\vec{rot}(\vec{A}) = 0$; autrement dit, **si le champ magnétique $\vec{B}$ est nul** au point d'entrée (x^0,y^0,z^0) **et** au point de sortie (x(t), y(t),z(t)), alors la matrice T_L est elle aussi symplectique.
On peut remarquer T_L peut être symplectique dans certains cas très particuliers sans que R_0 et R le soient : par exemple si T est égal à l'identité, c'est à dire si la transformation Hamiltonienne laisse inchangée toute variation Δu^0 (structure rigoureusement périodique) alors la condition devient :

$$\left(R^{-1} R_0\right)^t J \left(R^{-1} R_0\right) = \begin{bmatrix} \Omega_0 - \Omega - \Omega_0^t - \Omega^t & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = J$$

ce qui est vérifié si les champs magnétiques en entrée et en sortie sont égaux, non nécessairement nuls.

4.6 Symplectisation d'une matrice de transfert approchée

En pratique, la matrice T obtenue après intégration n'est pas *rigoureusement* symplectique en raison des erreurs numériques, et du fait que les variations Δu^0 permettant de calculer T_L puis T ne peuvent pas être infinitésimales en machine sous peine de noyer le résultat dans les erreurs d'arrondi et de troncature.

Le problème de la symplectisation de T peut alors être posé de la façon suivante : il s'agit de trouver la matrice ε telle que :

$$(173) \qquad \begin{cases} \hat{T} = T(I+\varepsilon) \\ \hat{T}^t J \hat{T} = J = (I+\varepsilon^t) T^t J T (I+\varepsilon) \\ \|\varepsilon\| \quad \text{minimum} \end{cases}$$

La condition de minimisation de la norme de ε est essentielle : on peut voir que si par hasard la matrice T était rigoureusement symplectique, toute matrice ε de la forme I-M où M est symplectique conviendrait !

Le groupe des matrices symplectiques en dimension (2n,2n) est en fait une sous-variété différentielle de $R^{(2n)^2}$ (R^{36} pour les matrices (6,6)) , de sorte qu'il s'agit de trouver la projection de T sur cette sous-variété.

En pratique, le problème (173) est résolu au coup par coup, mais il serait intéressant de mettre au point un algorithme général de résolution (problème ouvert ?...).

4.7 Calcul exact quand le Hessien de l'Hamiltonien est constant

Si le Hessien de H (c'est à dire la matrice de ses dérivées secondes) est constant, on peut calculer analytiquement la matrice symplectique T, en effet :

$$(174)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= J\nabla_u H(u(t),t) \\ u(0) &= u^0 \\ \dfrac{d(u+\Delta u)}{dt} &= J\nabla_u H((u+\Delta u)(t),t) \\ (u+\Delta u)(0) &= u^0+\Delta u^0 \end{cases}$$

d'où par soustraction l'égalité :

$$(175)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Delta u}{dt}(t) &= JS\Delta u(t) \\ \Delta u(0) &= \Delta u^0 \end{cases} \quad ; \quad S = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}\right]$$

où la matrice S est *symétrique* par construction et *constante* d'après notre hypothèse. La solution exacte de (175) est alors donnée par :

$$(176)\qquad \begin{cases} \Delta u(t) &= T\Delta u^0 \\ T &= e^{JSt} \end{cases}$$

La matrice T est bien sûr symplectique d'après le § 4.2, mais aussi comme nous l'avons directement constaté au § 3.3.De plus nous pouvons vérifier que le déterminant de T est égal à 1 en utilisant le théorème relatif aux équations différentielles linéaires, selon lequel :

$$(177)\qquad \det(T(t)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{trace}(JS\tau)\, d\tau\right)$$

Il est facile de vérifier que la trace de JS, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux, est nulle ...

L'évaluation de l'exponentielle de la matrice JSt ne pose pas de problème particulier dans les cas concrets, qui concernent souvent la partie interne des objets « hard edge ».

4.8 Interfaces « Hard edge »

Le cas particulier des interfaces « hard edge » correspond à une discontinuité du potentiel V ou bien du potentiel A au voisinage d'un point donné de la trajectoire de référence. L'on peut considérer que dans l'expression de l'Hamiltonien H, il suffit de représenter le potentiel discontinu par le produit d'une fonction différentiable donnant les valeurs désirées à l'intérieur de l'objet et de la fonction plateau qui vaut 1 à l'intérieur de l'objet, et 0 à l'extérieur.

On peut alors évaluer la matrice « St » ci-dessus, qui est en fait une matrice $\tilde{S}$ obtenue en passant à la limite sur un intervalle de temps infiniment petit, en calculant le Hessien de H au sens des distributions, ou bien en partant d'une interface d'épaisseur ε et en passant à la limite.

Les champs V et A ne dépendant pas de la variable conjuguée p, mais seulement des variables d'espace, la matrice $\tilde{S}$ d'une interface prend toujours la forme simple :

$$(178) \qquad \tilde{S} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de sorte que :

$$(179) \qquad J\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -U & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquant que $(JSt)^k = 0$ dès que $k \geq 2$:

$$(180) \qquad T = I + J\tilde{S} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -U & I \end{bmatrix}$$

La matrice globale d'un objet « Hard edge » est donc le produit de 3 *matrices symplectiques* : la 1ère représentant l'interface d'entrée, la 2ème représentant l'intérieur de l'objet, et la 3ème correspondant à l'interface de sortie.

On peut noter qu'il est possible de s'arrêter n'importe où à l'intérieur de l'objet sans pour autant perdre la symplecticité de la matrice partielle !

4.9 Notion de matrice faisceau

Nous savons qu'une petite variation Δu^0 de la condition initiale se traduit par la variation $\Delta u = T\Delta u^0$ à l'instant t. En général, on s'intéresse à l'évolution d'un ellipsoïde de dimension 2n dont l'équation s'écrit :

$$(181) \qquad \left(\Delta u^0\right)^t \sigma_0^{-1} \Delta u^0 = 1$$

où σ_0 est une matrice de dimension (2n,2n), symétrique définie positive appelée « matrice faisceau ».

D'après (159) et (181), on obtient à l'instant t :

$$\left(T^{-1}\Delta u\right)^t \sigma_0^{-1} T^{-1} \Delta u = \left(\Delta u\right)^t \left(T^t\right)^{-1} \sigma_0^{-1} T^{-1} \Delta u = 1$$

de sorte que σ_0 devient :

$$(182) \qquad \sigma = T\sigma_0 T^t$$

où σ est encore symétrique définie positive.

Plus généralement, si le faisceau traverse m objets successifs, on obtient :

(183) $\sigma = T_m \ldots T_2 T_1 \sigma_0 T_1^t T_2^t \ldots T_m^t$

Du fait que les matrices symplectiques de transfert ont un déterminant égal à 1, le determinant de σ est égal au déterminant de σ_0.

5. Exemples

Nous allons illustrer ce qui précède à l'aide d'exemples où l'on connaît l'expression analytique du champ électromagnétique et où le Hessien de l'Hamiltonien est une matrice constante au cours du mouvement. La méthode employée est systématique et comprend les étapes suivantes :

- choisir le système de variables conjuguées et la variable d'évolution
- déterminer dans ce système les expressions analytiques des potentiels V et A
- exprimer l'Hamiltonien H dans le système de variables conjuguées choisi
- calculer toutes ses dérivées secondes pour exprimer le Hessien S de l'Hamiltonien
- calculer la matrice exponentielle pour obtenir la matrice de transfert

On peut noter que les équations du mouvement n'interviennent pas. De plus le processus est exactement le même pour le calcul des matrices de transfert des interfaces « Hard edge » comme nous le verrons dans l'exemple de l'inflecteur de Muller. Par ailleurs le choix du système de variables peut se faire sur des critères de simplification des calculs, les changements de variables éventuels s'effectuant par matrice de passage en entrée et en sortie de l'objet considéré.

5.1 « Drift » pour des particules non relativistes

En l'absence de champ électromagnétique, et pour des particules non relativistes, l'Hamiltonien prend, en coordonnées cartésiennes, la forme très simple :

$$(184)\qquad \begin{cases} u & = & (q,p) & = & (x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ H(q,p,t) & = & \dfrac{p^2}{2m_0} & = & \dfrac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m_0} \end{cases}$$

Compte-tenu de (55), les variables conjuguées p, l'impulsion mécanique p et l'impulsion généralisée P sont ici confondues.

Pour calculer la matrice de transfert T, il faut d'abord évaluer le Hessien S de H :

$$(185)\qquad S = \left[\frac{\partial H}{\partial u_i \partial u_j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_0} I \end{bmatrix}$$

Le Hessien étant une matrice constante, nous sommes dans la situation du § 4.7 :

$$(186)\qquad JS = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_0} I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$(187)\qquad T = e^{JSt} = I + JSt = \begin{bmatrix} I & \frac{t}{m_0} I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Notant L la longueur parcourue par la particule de référence pendant le temps t, et p^0 le module de son impulsion, c'est à dire :

$$(188) \qquad L = \frac{p^0 t}{m_0}$$

ceci se traduit par :

$$(189) \qquad \begin{cases} \Delta q = \Delta q^0 + L\dfrac{\Delta p^0}{p^0} \\ \Delta p = \Delta p^0 \end{cases}$$

5.2 « Drift » pour des particules relativistes

Prenons dans ce cas l'Hamiltonien donné par la formule (64), en portant V et A à 0 :

$$(190) \qquad H = \left(E_0^2 + c^2\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = mc^2 = m_0 \gamma c^2$$

Nous avons en particulier :

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{c^2 p_x}{H}$$

Nous savons que H est constant au cours du temps. Cependant, il ne faut pas commettre l'erreur, pour calculer les dérivées secondes, de ne pas dériver H ! L'Hamiltonien dépend en effet explicitement des variables qui nous intéressent. Le calcul complet nous donne :

$$(191) \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$$

où :

$$(192) \qquad U = \frac{c^2}{H}\begin{bmatrix} 1-\dfrac{c^2 p_x^2}{H^2} & -\dfrac{p_x p_y}{H^2} & -\dfrac{p_x p_z}{H^2} \\ -\dfrac{p_y p_x}{H^2} & 1-\dfrac{c^2 p_y^2}{H^2} & -\dfrac{p_y p_z}{H^2} \\ -\dfrac{p_z p_x}{H^2} & -\dfrac{p_z p_y}{H^2} & 1-\dfrac{c^2 p_z^2}{H^2} \end{bmatrix}$$

Les composantes de l'impulsion de la particule de référence sont constantes au cours du mouvement de sorte que le Hessien S est une matrice constante. Cependant choisissons l'orientation du repère (x,y,z) de telle sorte que la particule centrale se déplace sur l'axe z, c'est à dire :

$$(193)\qquad \begin{cases} p_x = p_x^0 = 0 \\ p_y = p_y^0 = 0 \\ p_z = p_z^0 = p^0 \end{cases}$$

La matrice U prend alors la forme simple :

$$(194)\qquad U = \frac{1}{m_0 \gamma}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^2} \end{bmatrix}$$

d'où la matrice de transfert :

$$(195)\qquad T = e^{JSt} = \begin{bmatrix} I & tU \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Cette fois nous avons :

$$(196)\qquad L = \frac{p_0}{m} t = \frac{p_0}{m_0 \gamma} t$$

ce qui donne :

$$(197)\qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta x^0 + L\frac{\Delta p_x^0}{p^0} \\ \Delta y = \Delta y^0 + L\frac{\Delta p_y^0}{p^0} \\ \Delta z = \Delta z^0 + \frac{L}{\gamma^2}\frac{\Delta p_z^0}{p^0} \end{cases}$$

Notez la contribution en $\frac{1}{\gamma^2}$ dans le terme longitudinal...

5.2 Dipôle

Nous nous plaçons cette fois dans l'hypothèse d'un potentiel scalaire nul, d'un champ magnétique B réduit à une composante b_z constante et négative. Nous sommes donc dans un dipôle ou dans une portion de cyclotron sans indice de champ et loin des « gaps » accélérateurs.
Compte-tenu de la relation $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$, nous avons donc :

$$(198)\qquad \begin{cases} V &= 0 \\ A_x &= -\dfrac{b_z}{2}y \\ A_y &= \dfrac{b_z}{2}x \\ A_z &= 0 \end{cases}$$

Pour simplifier l'étude, nous nous plaçons dans le cas de particules non relativistes, de sorte que l'Hamiltonien prend la forme :

$$(199)\qquad \begin{cases} u &= (q,p) = (x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ H(q,p,t) &= \dfrac{\left(p_x+\dfrac{qb_z}{2}y\right)^2+\left(p_y-\dfrac{qb_z}{2}x\right)^2+p_z^2}{2m_0} \end{cases}$$

Compte-tenu de (55) et (198), les variables conjuguées p, l'impulsion mécanique p et l'impulsion généralisée P ne sont pas confondues et vérifient les relations :

$$(200)\qquad \begin{cases} p_x = p_x - \dfrac{qb_z}{2}y = P_x \\ p_y = p_y + \dfrac{qb_z}{2}x = P_y \\ p_z = p_z = P_z \end{cases}$$

et il en est de même pour de petites variations :

$$(201)\qquad \begin{cases} \Delta p_x = \Delta p_x - \dfrac{qb_z}{2}\Delta y = \Delta P_x \\ \Delta p_y = \Delta p_y + \dfrac{qb_z}{2}\Delta x = \Delta P_y \\ \Delta p_z = \Delta p_z = \Delta P_z \end{cases}$$

Adoptant la notation :

$$(202)\qquad \omega = -\frac{q\,b_z}{m_0}$$

et calculant les dérivées secondes de l'Hamiltonien, on obtient son Hessien :

$$(203) \qquad S = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 m_0}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 m_0}{4} & 0 & -\frac{\omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} \end{bmatrix}$$

Introduisons ici les *trois matrices élémentaires* suivantes, qui sont toujours d'une grande utilité pour les calculs de nos matrices exponentielles :

$$(204) \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec les propriétés immédiates :

$$(205) \qquad \begin{cases} N^2 = N & ; \quad E^2 = E & ; \quad M^2 = -N \\ NE = EN = 0 & ; \quad NM = MN = M & ; \quad EM = ME = 0 \end{cases}$$

Notant par ailleurs :

$$(206) \qquad \theta = \omega t \quad ; \quad a = m_0 \omega$$

il vient :

$$(207) \qquad St = \theta \begin{bmatrix} \frac{a}{4} N & -\frac{1}{2} M \\ \frac{1}{2} M & \frac{1}{a} I \end{bmatrix}$$

et

$$(208) \qquad JSt = \theta \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{4} N & -\frac{1}{2} M \\ \frac{1}{2} M & \frac{1}{a} I \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} M & \frac{1}{a} I \\ -\frac{a}{4} N & \frac{1}{2} M \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de faire apparaître le découplage horizontal et vertical en remarquant que I = N+E :

$$(209) \qquad JSt = A_0 + \hat{A} = \theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a}E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2}M & \frac{1}{a}N \\ -\frac{a}{4}N & \frac{1}{2}M \end{bmatrix}$$

Nous pouvons à présent développer les termes de l'exponentielle de matrice. Contrairement à se qui se passe pour le « drift », nous avons ici une suite infinie de termes non nuls. Cependant ces termes se regroupent pour faire apparaître des développements de sinus et de cosinus, en effet :

$$\hat{A}^2 = \theta^2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}N & \frac{1}{a}M \\ -\frac{a}{4}M & -\frac{1}{2}N \end{bmatrix} = \theta^2 B$$

$$\hat{A}^3 = -\theta^3\begin{bmatrix} \frac{1}{2}M & \frac{1}{a}N \\ -\frac{a}{4}N & \frac{1}{2}M \end{bmatrix} = -\theta^3 C \quad \text{etc...}$$

D'autre part les puissances successives de A_0 sont nulles et les produits $A_0\hat{A}$ et $\hat{A}A_0$ sont nuls également. En définitive, l'on obtient :

$$(210) \qquad T = e^{JSt} = I + A_0 + (1-\cos\theta).B + \sin\theta.C$$

c'est à dire la matrice de transfert *symplectique* :

$$(211) \qquad T = \begin{bmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{2} & 0 & \frac{\sin\theta}{a} & -\frac{1-\cos\theta}{a} & 0 \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} & 0 & \frac{1-\cos\theta}{a} & \frac{\sin\theta}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\theta}{a} \\ -a\frac{\sin\theta}{4} & a\frac{1-\cos\theta}{4} & 0 & \frac{1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{2} & 0 \\ -a\frac{1-\cos\theta}{4} & -a\frac{\sin\theta}{4} & 0 & \frac{\sin\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice n'a pas la forme habituelle du fait que les petites variations des coordonnées généralisées choisies ne sont pas celles utilisées habituellement.

Considérons une particule à l'instant t différant de la particule de référence au même instant par les quantités $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z)$; les écarts en terme d'impulsion mécanique sont donnés par :

$$(212)\qquad \begin{cases} \Delta p_x = \Delta p_x - q\Delta A_x = \Delta p_x + \dfrac{q\,b_z}{2}\Delta y \\ \Delta p_y = \Delta p_y - q\Delta A_y = \Delta p_y - \dfrac{q\,b_z}{2}\Delta x \\ \Delta p_z = \Delta p_z \end{cases}$$

Soit maintenant α l'angle d'entrée ou de sortie, égal à 0 ou à θ, et notons Δr et Δs les petites variations radiales et curvilignes correspondant à Δx et Δy. Nous avons *au premier ordre* :

$$(213)\qquad \begin{cases} \Delta r = \cos\alpha\,\Delta x + \sin\alpha\,\Delta y \\ \Delta s = -\sin\alpha\,\Delta x + \cos\alpha\,\Delta y \end{cases}$$

et de même :

$$(214)\qquad \begin{cases} \Delta p_r = \cos\alpha\,\Delta p_x + \sin\alpha\,\Delta p_y \\ \Delta p_s = -\sin\alpha\,\Delta p_x + \cos\alpha\,\Delta p_y \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$(215)\qquad \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta p_s \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{qb_z}{2}\sin\alpha & \dfrac{qb_z}{2}\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\dfrac{qb_z}{2}\cos\alpha & -\dfrac{qb_z}{2}\sin\alpha & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \end{bmatrix}$$

Attention : cette matrice de passage *n'est pas symplectique* ! On peut par contre rendre la matrice symplectique en prenant en compte l'effet particulier sur Δp_r que l'on pourrait qualifier d'effet SNCF :

Considérons un train composé d'un locomotive et d'un wagon, le wagon jouant le rôle de particule de référence. Ce train est assujetti à suivre un rail circulaire de rayon r. La distance curviligne entre la locomotive et le wagon étant de Δs, la locomotive est dotée, dans le repère du wagon, d'une légère impulsion mécanique radiale égale à :

$$(216)\qquad \delta p_r = -\frac{p^0}{r}\Delta s$$

où p^0 est l'impulsion mécanique du train.

Cependant, l'on a « envie » de dire que la locomotive n'a pas de composante radiale du fait qu'elle suit le rail... En fait elle a bien une composante radiale à l'instant t dans le repère local du wagon !

Revenant à notre problème, nous allons introduire une « impulsion radiale corrigée » $\Delta\hat{p}_r$ par la relation :

(217) $$\Delta\hat{p}_r = \Delta p_r - \delta p_r = \Delta p_r + \frac{p^0}{r}\Delta s = \Delta p_r - q b_z \Delta s$$

d'où l'on déduit la matrice de passage :

(218) $$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta\hat{p}_r \\ \Delta p_s \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -qb_z & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta p_s \\ \Delta p_z \end{bmatrix}$$

et en combinant (215) et (218) :

(219) $$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta\hat{p}_r \\ \Delta p_s \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{qb_z}{2}\sin\alpha & -\frac{qb_z}{2}\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\frac{qb_z}{2}\cos\alpha & -\frac{qb_z}{2}\sin\alpha & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \end{bmatrix}$$

Notons à présent respectivement R_0 et R_θ les matrices de passages obtenues à l'entrée et à la sortie, c'est à dire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \theta$. Notons par ailleurs :

(220) $$\begin{cases} \Delta u = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z) \\ \Delta\hat{u} = (\Delta r, \Delta s, \Delta z, \Delta\hat{p}_r, \Delta p_s, \Delta p_z) \end{cases}$$

Nous avons :

(221) $$\Delta\hat{u}^0 = R_0 \Delta u^0 \quad ; \quad \Delta\hat{u} = R_\theta \Delta u$$

et d'après (211) et (219) :

(222) $$\begin{cases} \Delta u = T\Delta u^0 \\ \Delta\hat{u} = R_\theta T R_0^{-1} \Delta\hat{u}^0 = \hat{T}\Delta\hat{u}^0 \end{cases}$$

avec une matrice de transfert $\hat{T}$, faisant passer de $\Delta\hat{u}^0$ à $\Delta\hat{u}$ entre l'instant 0 et l'instant t, qui s'écrit :

$$(223)\qquad \hat{T} = R_\theta T R_0^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \frac{\sin\theta}{a} & \frac{1-\cos\theta}{a} & 0 \\ -\sin\theta & 1 & 0 & -\frac{1-\cos\theta}{a} & \frac{\sin\theta}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\theta}{a} \\ -a\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément que cette matrice est *symplectique* !

Effectuons maintenant l'étude du dipôle *en choisissant* θ *comme variable d'évolution.* Nous sommes donc dans la situation du paragraphe 2.5, avec, en coordonnées cylindriques, le champ électromagnétique donné par :

$$(224)\qquad \begin{cases} V = 0 \\ A_r = 0 \\ A_\theta = \frac{b_z}{2} r \\ A_z = 0 \end{cases}$$

et l'Hamiltonien relativiste *dépendant du temps* s'écrit :

$$(225)\qquad \begin{cases} w = (q,p) = (r,\theta,z,p_r,p_\theta,p_z) \\ H(q,p,t) = \dfrac{p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{qb_z}{2} r\right)^2 + p_z^2}{2m_0} \end{cases}$$

avec les relations provenant de (56) et (224) :

$$(226)\qquad \begin{cases} p_r = p_r = P_r \\ p_\theta = r\left(p_\theta + \frac{qb_z}{2} r\right) = P_\theta \\ p_z = p_z = P_z \end{cases}$$

Intervertissant les variables θ *et* t, et compte-tenu des relations établies au § 2.5 :

$$(227)\qquad \begin{cases} \hat{p}_t = -H \\ \hat{H} = -p_\theta \end{cases}$$

nous obtenons le nouveau système :

$$(228)\qquad \begin{cases} \hat{w} = (\hat{q},\hat{p}) = (r,t,z,p_r,\hat{p}_t,p_z) \\ \hat{H}(\hat{q},\hat{p},\theta) = -\frac{qb_z}{2} r^2 - r\left(-2m_0\hat{p}_t - p_r^2 - p_z^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Le Hessien du nouvel Hamiltonien $\hat{H}$ se calcule aisément :

$$(229) \qquad \hat{S} = \begin{bmatrix} \frac{p^0}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_0}{p^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{p^0} & 0 & 0 \\ \frac{m_0}{p^0} & 0 & 0 & 0 & \frac{r m_0^2}{(p^0)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{p^0} \end{bmatrix}$$

Effectuant le calcul de $\hat{T}_\theta = e^{J\hat{S}\theta}$, on obtient :

$$(230) \qquad \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta t \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta \hat{p}_t \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \frac{r}{p^0}\sin\theta & -\frac{r m_0}{(p^0)^2}(1-\cos\theta) & 0 \\ \frac{m_0}{p^0}\sin\theta & 1 & 0 & \frac{r m_0}{(p^0)^2}(1-\cos\theta) & \frac{r m_0^2}{(p^0)^3}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{r}{p^0}\theta \\ -\frac{p^0}{r}\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & -\frac{m_0}{p^0}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r^0 \\ \Delta t^0 \\ \Delta z^0 \\ \Delta p_r^0 \\ \Delta \hat{p}_t^0 \\ \Delta p_z^0 \end{bmatrix}$$

soit encore :

$$(231) \qquad \Delta\hat{w} = \hat{T}_\theta \, \Delta\hat{w}^0$$

Cette matrice $\hat{T}_\theta$, qui fait passer de l'angle 0 à l'angle θ ressemble à la matrice $\hat{T}$ établie en (223) et qui faisait passer de l'instant 0 à l'instant t. Pour passer de l'une à l'autre, il suffit d'exprimer, *en entrée et en sortie*, la matrice de passage entre les petites variations trouvées quand la variable d'évolution est le temps t, et les petites variations trouvées quand la variable d'évolution est l'angle θ :

Une particule qui passe par exemple à l'angle θ à un instant décalé de Δt par rapport à la particule de référence se trouverait (ou se trouvera) en fait au même instant que celle-ci à l'abscisse curviligne :

$$\Delta s = -\frac{p^0}{m_0}\Delta t$$

Pour préserver le produit des variables conjuguées $t.\hat{p}_t$ nous devons associer à Δs la variable :

$$-\frac{m_0}{p^0}\Delta\hat{p}_t \quad = \quad \frac{m_0}{p^0}\Delta H \quad = \quad \frac{m_0}{p^0}\Delta\left(\frac{p^2}{2m_0}\right) \quad = \quad \Delta p$$

mais du fait que :

$$(p+\Delta p)^2 \quad = \quad \Delta p_r^2 + (p+\Delta p_s)^2 + \Delta p_z^2$$

il vient classiquement :

$$\Delta p_s \quad = \quad \Delta p$$

Par ailleurs nous avons d'une part, grâce à (226), $\Delta p_z = \Delta p_z$, et d'autre part, les petites variations Δr, Δz , Δp_s et Δp_z sont prises à l'angle θ (resp. à l'angle 0), mais elles sont égales à l'ordre 1 aux variations correspondantes prises à l'instant t (resp. à l'instant 0) dans la définition (220).

Quant au $\Delta\hat{p}_r$ de la définition (220), il est égal par construction de « l'effet SNCF » au Δp_r à l'angle θ (resp. à l'angle 0) lui même égal à Δp_r en raison de (226).

En définitive, nous avons :

$$(232) \qquad \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta p \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^0}{m_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_0}{p^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta t \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta\hat{p}_t \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta t \\ \Delta z \\ \Delta p_r \\ \Delta\hat{p}_t \\ \Delta p_z \end{bmatrix}$$

En résumé, nous avons, en raison de (220), (222) et de ce qui vient d'être montré :

$$(233) \qquad \begin{cases} \Delta\hat{u}^0 = (\Delta r^0, \Delta s^0, \Delta z^0, \Delta\hat{p}_r^0, \Delta p_s^0, \Delta p_z^0) \\ \Delta\hat{u} = (\Delta r, \Delta s, \Delta z, \Delta\hat{p}_r, \Delta p_s, \Delta p_z) \\ \Delta\hat{w}^0 = (\Delta^0 r, \Delta t^0, \Delta z^0, \Delta p_r^0, \Delta\hat{p}_t^0, \Delta p_z^0) \\ \Delta\hat{w} = (\Delta r, \Delta t, \Delta z, \Delta p_r, \Delta\hat{p}_t, \Delta p_z) \\ \Delta\tilde{w}^0 = (\Delta r^0, \Delta s^0, \Delta z^0, \Delta p_r^0, \Delta p^0, \Delta p_z^0) = \Delta\hat{u}^0 \\ \Delta\tilde{w} = (\Delta r, \Delta s, \Delta z, \Delta p_r, \Delta p, \Delta p_z) = \Delta\hat{u} \\ \\ \Delta\hat{u} = \hat{T}\Delta\hat{u}^0 \\ \Delta\hat{w} = \hat{T}_\theta \Delta\hat{w}^0 \\ \Delta\tilde{w}^0 = D\Delta\hat{w}^0 \\ \Delta\tilde{w} = D\Delta\hat{w} \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$(234) \qquad \hat{T} \quad = \quad D\hat{T}_\theta D^{-1}$$

ce que l'on peut vérifier à posteriori en calculant explicitement le produit matriciel ci-dessus à l'aide de la matrice D donnée par (232), de la matrice $\hat{T}_\theta$ donnée par (230) et en comparant le résultat avec la matrice $\hat{T}$ donnée par (223)...

remarque : Nous avons vu que la matrice $\hat{T}$ est symplectique et que $\hat{T}_\theta$ l'est donc aussi du fait que D est évidemment symplectique. L'on pourrait s'en étonner du fait que les petites variations correspondantes font intervenir des impulsions mécaniques... Ceci s'explique par le fait que nous regardons les choses dans les plans d'angle 0 et θ avec un potentiel vecteur A perpendiculaire à ces plans et ayant donc sa seule composante azimutale. De ce fait les composantes radiales et verticales de l'impulsion mécanique se confondent avec les composantes radiales et verticales de l'impulsion généralisée, c'est à dire avec les « vraies » variables conjuguées ...

5.4 Inflecteur de Muller

Nous abordons ici un objet électrostatique composé de 2 électrodes, plongé dans un champ magnétostatique, et dont nous allons prendre en compte les 2 interfaces « hard edge ».

L'objet lui-même possède un hauteur A, et nous considérons qu'il est placé en dessous du plan médian comme dans le cas du cyclotron CIME, et que le champ magnétique est réduit à une composante b_z négative. Le champ électromagnétique est donc donné par :

$$(235)\qquad \begin{cases} V &= \mu\left((x+2A)^2+y^2-2(z+A)^2-4A^2\right)Y(x,y,z) \\ \mu &= -\dfrac{E_0}{4A} \\ A_x &= -\dfrac{b_z}{2}y \\ A_y &= \dfrac{b_z}{2}x \\ A_z &= 0 \end{cases}$$

E_0 désigne le champ électrique au point (x,y,z) = (0,0,-A), c'est à dire à l'entrée de l'inflecteur, où passe la particule de référence.
Y(x,y,z) désigne la fonction plateau qui vaut 1 à l'intérieur de l'inflecteur et 0 à l'extérieur. Elle vaut donc 0 pour $z < -A$ et au delà du plan perpendiculaire définissant la face de sortie.

Par ailleurs, nous nous plaçons dans l'hypothèse de particules non relativistes et considérons une particule de référence, de masse m_0 et de charge q, dotée des conditions initiales suivantes :

$$(236)\qquad \begin{cases} x^0 = 0 \\ y^0 = 0 \\ z^0 = -A \\ p_x^0 = 0 \\ p_y^0 = 0 \\ p_z^0 = m_0 v^0 \end{cases}$$

L'inflecteur de Muller est en fait un cas particulier d'inflecteur spiral de type Belmont-Pabot et sans doute le seul dont on connaisse la formule analytique du potentiel électrique.

Les formules de l'inflecteur de Muller font apparaître les 3 constantes caractéristiques (ω,K,k_0) :

$$(237)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{q E_0}{m_0 v^0} = \dfrac{v^0}{A} \\ K = \sqrt{\dfrac{3}{8}} \\ k_0 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ 2K - k_0 = -\dfrac{v^0 b_z}{E_0} = \sqrt{6} \end{cases}$$

On en déduit le rayon de courbure de la trajectoire après sortie de l'inflecteur de Muller, qui dépend directement de sa hauteur :

$$(238)\qquad \rho_m = -\frac{m_0 v^0}{q b_z} = \frac{A}{2K - k_0} = \frac{A}{\sqrt{6}}$$

ainsi que la trajectoire interne de la particule de référence :

$$(239)\qquad \begin{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\omega} \\ x(t) = -\dfrac{A}{2}\left[\dfrac{2}{4K^2-1} + \dfrac{\cos(2K+1)\omega t}{2K+1} - \dfrac{\cos(2K-1)\omega t}{2K-1}\right] \\ y(t) = \dfrac{A}{2}\left[-\dfrac{\sin(2K+1)\omega t}{2K+1} + \dfrac{\sin(2K-1)\omega t}{2K-1}\right] \\ z(t) = A\left[\sin\omega t - 1\right] \end{cases}$$

Cette trajectoire est contenue dans la surface de potentiel nul de sorte que la particule de référence possède un module de vitesse constant v^0.

En coordonnées cartésiennes, l'Hamiltonien du système prend la forme suivante :

$$(240)\qquad \begin{cases} u & = & (q,p) & = & (x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ H(q,p,t) & = & \dfrac{\left(p_x+\dfrac{qb_z}{2}y\right)^2+\left(p_y-\dfrac{qb_z}{2}x\right)^2+p_z^2}{2m_0} & + & qV(x,y,z) \end{cases}$$

où le potentiel V est donné dans (235).

Comme dans le cas du dipôle, les variables conjuguées p, l'impulsion mécanique p et l'impulsion généralisée P ne sont pas confondues et vérifient les relations :

$$(241)\qquad \begin{cases} p_x & = & p_x-\dfrac{qb_z}{2}y & = & P_x \\ p_y & = & p_y+\dfrac{qb_z}{2}x & = & P_y \\ p_z & = & p_z & = & P_z \end{cases}$$

et il en est de même pour de petites variations :

$$(242)\qquad \begin{cases} \Delta p_x & = & \Delta p_x-\dfrac{qb_z}{2}\Delta y & = & \Delta P_x \\ \Delta p_y & = & \Delta p_y+\dfrac{qb_z}{2}\Delta x & = & \Delta P_y \\ \Delta p_z & = & \Delta p_z & = & \Delta P_z \end{cases}$$

Pour calculer la matrice de transfert totale T de l'inflecteur, il nous faut calculer la matrice d'interface d'entrée T_e, la matrice interne T_i, et la matrice correspondant à l'interface de sortie T_s ; nous avons bien sûr la relation :

$$(243)\qquad T = T_s\ T_i\ T_e$$

Les calculs de ces matrices étant indépendants, nous commencerons par étudier la matrice interne.

Le Hessien de l'Hamiltonien se calcule aisément, en considérant qu'à l'intérieur de l'inflecteur, la fonction plateau Y qui intervient dans l'expression du potentiel est égale à 1 :

A titre indicatif, calculons la dérivée seconde de H selon x :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -qb_z\frac{\left(p_y-\dfrac{qb_z}{2}x\right)}{2m_0} + 2\mu q(x+2A)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{q^2b_z^2}{4m_0} + 2\mu q = m_0\omega^2$$

Tous calculs faits, l'on obtient :

$$(244) \qquad S = \begin{bmatrix} m_0\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\omega & 0 \\ 0 & m_0\omega^2 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2}\omega & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\omega & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} \end{bmatrix}$$

D'après (237), ω dépend de v^0, mais nous savons que le module vitesse de la particule centrale est constant. Le Hessien S de H est donc une matrice constante au cours du temps à l'intérieur de l'inflecteur muller ! La matrice de transfert correspondante est donc l'exponentielle de JSt.

Utilisant les matrices élémentaires N, E et M définies en (204), et notant par ailleurs :

$$(245) \qquad a = m_0\,\omega \quad ; \quad \lambda = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

nous pouvons écrire :

$$(246) \qquad St = \omega t \begin{bmatrix} aI & -\lambda M \\ \lambda M & \frac{1}{a}I \end{bmatrix}$$

d'où l'on tire :

$$(247) \qquad JSt = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \omega t \begin{bmatrix} aI & -\lambda M \\ \lambda M & \frac{1}{a}I \end{bmatrix} = \omega t \begin{bmatrix} \lambda M & \frac{1}{a}I \\ -aI & \lambda M \end{bmatrix}$$

Le calcul de l'exponentielle de cette matrice fait intervenir le « triangle de Pascal », et en remarquant grâce à (239) que l'instant t d'arrivée à l'interface de sortie est tel que :

$$(248) \qquad t_s = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega}$$

on trouve finalement :

$$(249) \qquad T_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a}\left(\cos(K\pi)N + \sin(K\pi)M + E\right) \\ -a\left(\cos(K\pi)N + \sin(K\pi)M + E\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons à présent la matrice de transfert T_e relative à l'interface d'entrée en commençant par évaluer la matrice symétrique $\tilde{S}$ conçue comme la limite de l'expression « St » pendant le temps infiniment court de traversée de l'interface.

Comme indiqué dans le § 4.8, seules les *dérivées spatiales secondes* de l'Hamiltonien fournissent des termes éventuellement non nuls du fait que la fonction plateau Y intervient uniquement dans le terme de potentiel électrique. Par ailleurs, Y ne dépend que de z au voisinage de l'interface d'entrée. Nous avons au sens des distributions :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} Y + \hat{V} \frac{dY}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2} Y + 2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} \frac{dY}{dz} + \hat{V} \frac{d^2 Y}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x \partial z} Y + \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \frac{dY}{dz}$$

Soit $]-\varepsilon,\varepsilon[$ un intervalle de temps très court, $I_\varepsilon = \left]- A - \varepsilon v_0, -A + \varepsilon v_0\right[$ l'intervalle d'espace selon z correspondant, et ϕ_ε une « fonction test » dans $C^\infty(I_\varepsilon)$, à support compact , et telle que $\phi_\varepsilon(-A)=1$. Nous avons :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi_\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} dt = \int_{-A}^{-A+\varepsilon v^0} \phi_\varepsilon \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x \partial z} \frac{dz}{v^0} + \left\langle \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \frac{dY}{dz}, \frac{\phi_\varepsilon}{v^0} \right\rangle$$

$$= \int_{-A}^{-A+\varepsilon v^0} \phi_\varepsilon \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x \partial z} \frac{dz}{v^0} + \frac{1}{v^0} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(0,0,-A)$$

Passant à la limite quand ε tend vers 0, nous obtenons :

$$(250) \qquad \tilde{S}_e^{13} = \tilde{S}_e^{31} = \frac{q}{v^0} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(0,0,-A) = -\frac{q E_0}{v^0} = -m_0 \omega$$

De même :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi_\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dt = \int_{-A}^{A+\varepsilon v^0} \phi_\varepsilon \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2} \frac{dz}{v^0} + \left\langle 2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} \frac{dY}{dz} + \hat{V} \frac{d^2 Y}{dz^2}, \frac{\phi_\varepsilon}{v^0} \right\rangle$$

Remarquant que le potentiel $\hat{V}$ et sa dérivée première selon z sont nuls en (x,y,z) = (0,0,-A), le passage à la limite de l'expression ci-dessus donne 0. Quant aux contributions croisées en xy et en yz, on montre aisément qu'elles sont nulles, en particulier du fait que la dérivée première de $\hat{V}$ selon y est nulle au point (0,0,-A).

En définitive, notant :

$$(251) \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On déduit la matrice $\tilde{S}$ complète :

$$(252) \qquad \tilde{S}_e = \begin{bmatrix} -aU & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice de transfert de l'interface d'entrée :

$$(253) \qquad T_e = e^{J\tilde{S}_e} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ aU & I \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant la matrice de transfert de l'interface de sortie.

Le point de référence M_s de cette interface est obtenu grâce à (239), en prenant $t = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega}$:

$$(254) \qquad \begin{cases} x_s = 2A(-1 + 2K\sin\alpha) \\ y_s = 2A(-2K\cos\alpha) \\ z_s = 0 \end{cases}$$

On montre aisément que la trajectoire de référence en ce point fait un angle $\alpha = K\pi$ avec la droite parallèle à l'axe des x et passant par M_s, de sorte que l'interface de sortie est le plan vertical contenant M_s et faisant un angle $K\pi - \frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x.

D'autre part, l'expression du potentiel $\hat{V}$ donnée par (235) permet de calculer le champ électrique au point M_s :

$$(255) \qquad \begin{cases} E_x^s = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} = -2\mu(x_s + 2A) = -k_0 E_0 \sin\alpha \\ E_y^s = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial y} = -2\mu y = k_0 E_0 \cos\alpha \\ E_z^s = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial z} = 4\mu(z_s + A) = -E_0 \end{cases}$$

avec un module de champ :

$$(256) \qquad E^s = \sqrt{1 + k_0^2}\, E_0$$

Ceci montre que le champ électrique fait avec le plan horizontal un angle β tel que :

$$\cos\beta = \frac{-k_0}{\sqrt{1+k_0^2}} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+k_0^2}}$$

Introduisons les matrices de changement de repères :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad R_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\beta & -\cos\beta & 0 \end{bmatrix}$$

et $\tilde{S}_1$ la matrice du repère local lié à E_s analogue à $\tilde{S}_e$ selon :

$$\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} -bU & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = m_0 \omega \sqrt{1+k_0^2}$$

On montre que la matrice $\tilde{S}_s$ exprimée dans le repère global s'écrit :

$$(257) \qquad \tilde{S}_s = R_\alpha R_\beta \tilde{S}_1 R_\beta^{-1} R_\alpha^{-1}$$

ce qui donne :

$$(258) \qquad \tilde{S}_s = \begin{bmatrix} -aW & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$(259) \qquad W = \begin{bmatrix} 2k_0 \sin\alpha\cos\alpha & 2k_0(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) & \cos\alpha \\ 2k_0(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) & -2k_0 \sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

de sorte que la matrice de transfert symplectique de l'interface de sortie s'écrit :

$$(260) \qquad T_s = e^{J\tilde{S}_s} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ aW & I \end{bmatrix}$$

Ainsi, grâce à (249), (253) et (260), l'on déduit la matrice de transfert totale de l'inflecteur de Muller :

$$(261) \qquad T = T_s T_i T_e$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & \frac{\cos\alpha}{a} & \frac{-\sin\alpha}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \frac{\sin\alpha}{a} & \frac{\cos\alpha}{a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & a\sin\alpha & ak_0\sin\alpha & k_0\sin\alpha & -k_0\cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -a\cos\alpha & -ak_0\cos\alpha & -k_0\cos\alpha & -k_0\sin\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On vérifie à posteriori qu'elle est symplectique, c'est à dire qu'elle vérifie bien :

$$(262) \qquad T^t J T = J$$

Il faut ici avoir bien conscience du système de variables conjuguées utilisé : compte tenu de (240) et (242), la matrice de trandfert T transforme les petites variations $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z)$ de l'entrée à la sortie de l'inflecteur, en restant donc dans le *repère principal* et prenant les variables canoniques correspondantes.

Il est intéressant d'effectuer la même opération que pour le cas du dipôle, en sortie de l'inflecteur, c'est à dire là où la trajectoire de référence est horizontale et perpendiculaire au champ magnétique. Il faut alors prendre la matrice de transformation donnée par (219) en prenant comme l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$ de l'interface, correspondant à la transformation de x en r et de y en s . Cette matrice, qui tient compte à la fois de la rotation et de « l'effet SNCF », est donnée par :

$$(263) \qquad R_s = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{qb_z}{2}\cos\alpha & -\frac{qb_z}{2}\sin\alpha & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ -\frac{qb_z}{2}\sin\alpha & \frac{qb_z}{2}\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et permet donc de passer de $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z)$ à $(\Delta r, \Delta s, \Delta z, \Delta \hat{p}_r, \Delta p_s, \Delta p_z)$ comme expliqué en (220). La nouvelle transformation s'écrit alors :

$$(264) \qquad \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta \hat{p}_r \\ \Delta p_s \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = R_s T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta y^0 \\ \Delta z^0 \\ \Delta p_x^0 \\ \Delta p_y^0 \\ \Delta p_z^0 \end{bmatrix}$$

et l'on retrouve ainsi la matrice symplectique de Muller habituelle.

Cependant, il faut bien voir que la condition initiale contient toujours des petites variations de la variable canonique p^0, qui n'est pas confondue avec l'impulsion mécanique !

Toutefois considèrons le cas particulier où le champ magnétique est en fait nul « avant l'entrée de l'inflecteur ». Dans une telle situation, qui simule le champ de fuite dans le puits d'un cyclotron, il faut introduire la discontinuité du champ magnétique dans l'expression de l'Hamiltonien au niveau de l'interface d'entrée.

L'on montre alors que l'effet d'une telle interface magnétique est nul sur la variable canonique p^0 ! La matrice de transfert est donc inchangée et d'autre part les petites variations Δp^0 sont égales aux petites variations Δp^0 de l'impulsion mécanique du fait que l'on part d'un champ magnétique nul.

6. Remerciements

Je tiens à remercier Les membres du groupe SPIRAL, et en particulier Mme M. P. Bourgarel et MM. B. Bru, A. Chabert, M. Lieuvin et Ch. Ricaud, ainsi que MM. J. Fermé et O. Juillet pour leurs encouragements et les nombreuses discussions que nous avons eues sur le sujet traité.

7. Commentaires bibliographiques et conclusion

Le premier chapitre consacré au formalisme Lagrangien est inspiré du cours de A. Blanc-Lapierre [1] aimablement transmis par E. Baron. En introduisant ce formalisme à partir de l'équation fondamentale de la dynamique, où le temps est la variable d'évolution naturelle, le premier chapitre permet d'introduire les équations de Hamilton en évitant une trop grande abstraction.

Les chapitres 2, 3 et 4 consacrés au formalisme Hamiltonien et aux matrices symplectiques, sont largement inspirés du cours de Alex J. Dragt [2] . Cependant, pour ne pas alourdir l'exposé, nous avons éviter l'introduction des groupes et de l'algèbre de Lie qui constitue l'essentiel de l'exposé de Dragt. Ces notions sont par contre très utiles si l'on veut approfondir l'effet des ordres supérieurs. Une approche complémentaire de la théorie des groupes de Lie, et en particulier le lien entre cette théorie et la géométrie différentielle peut être trouvée dans [4].

La démonstration du fait que l'on sait intégrer les équations de Hamilton dans le cas où le Hessien est constant se trouve dans le cours de H. Cartan [5]. Egalement dans [5], se trouve le théorème de trace utilisé dans le § 4.7, permettant de déduire qu'une matrice symplectique ayant la forme d'une exponentielle de matrice JS possède un déterminant égal à 1. Dans le cas d'une matrice symplectique quelconque, la démonstration très technique du fait que le déterminant est égal à 1 se trouve dans M. Hammermesh [7].

Des indications sur la matrice de Twiss qui apparaît au § 3.3 se trouvent dans le livre de H. Bruck [6].

Enfin, l'article original sur l'inflecteur de Muller est indiqué en [8] et les développements matriciels effectués aux GANIL par R. Beck, B. Bru et Ch. Ricaud sont référencés en [9] et [10].

Nous espérons que cette approche élémentaire du formalisme Hamiltonien retirera un peut de mystère quant à l'origine profonde des matrices symplectiques, que nous utilisons abondamment au GANIL.

8. Bibliographie

[1] A. J. Dragt. *Lectures on nonlinear orbit dynamics.* In Physics of High Energy Particle accelerators, AIP (1982).

[2] A. Blanc-Lapierre. *Dynamique relativiste.* Cours accélérateurs, INSTN (1964).

[3] R. Dautray, J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Vol. 5 Evolution Problems I, Springer Verlag ((1992).

[4] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer Verlag. (1993).

[5] H. Cartan. *Cours de Calcul Différentiel.* Hermann. (1967).

[6] H. Bruck. *Accélérateurs Circulaires de Particules.* Bibliothèque des sciences et techniques nucléaires. (1966).

[7] M. Hammermesh. *Group Theory and its Applications to Physical Problems.* Addison Wesley, Reading Massachusetts. (1962).

[8] R. W. Muller. *Novel inflectors for cyclic accelerators.* NIM 54 p. 29-41, (1967).

[9] R. Beck, B. Bru, Ch. Ricaud. *L'inflecteur Hyperboloïdal de R. W. Muller. Première partie : Théorie « Hard edge ».* GANIL A.86.02a (1986).

[10] R. Beck, B. Bru, Ch. Ricaud. *L'inflecteur Hyperboloïdal de R. W. Muller. Deuxième partie : Effets d'extrémité.* GANIL A.86.02b (1986).